Berechnungen nach Theorie 2. Ordnung im Stahlbetonbau

1. Einleitung

Der **Gleichgewichtszustand** von stabförmigen Bauteilen (Stützen, Wände, Pfähle, Bögen) unter Längsdruck muss **am verformten Tragwerk** nachgewiesen werden (**Theorie 2. Ordnung**), wenn Verformungen infolge von direkten Einwirkungen, Kriechauswirkungen oder Setzungen die **Tragfähigkeit um mehr als 10 % verringern**. Die Bemessungswerte der Schnittgrößen hierfür sind entweder mit der Plastizitätstheorie oder mit nichtlinearer Rechnung zu ermitteln. Für **Einzelstützen ist nur eine nichtlineare Rechnung** zulässig.

Die Grundlage für die nichtlineare Rechnung zur Ermittlung von Schnittgrößen und Verformungen bilden die Werkstoffgesetze für Beton und Betonstahl:

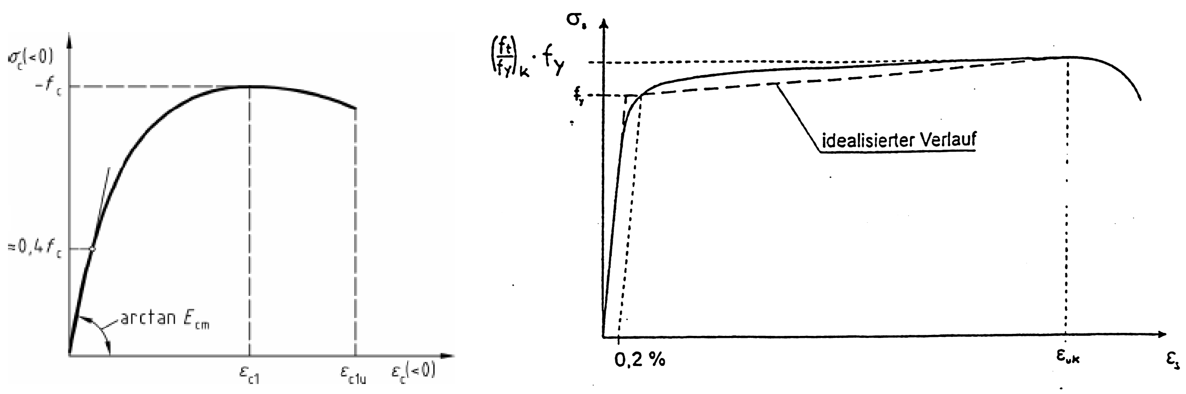


Bild: Werkstoffgesetze für die nichtlineare Rechnung

Die Funktion für die Betonspannung in dem oben abgebildeten Werkstoffgesetz ist in der Norm festgelegt:

$$\sigma_c = f_c \cdot \frac{k \cdot \eta - \eta^2}{1 + (k-2) \cdot \eta} \qquad (1.1)$$

Abkürzungen: $\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$ $\qquad k = 1{,}05 \cdot E_c \cdot |\varepsilon_{c1}| / f_c$

Der **Grenzzustand der Tragfähigkeit** gilt als erreicht, wenn in einem beliebigen Querschnitt des untersuchten Tragwerks

die kritische Stahldehnung ε_{su} oder
die kritische Betondehnung ε_{cu} oder
der kritische Zustand der Stabilität erreicht ist.

Für Nachweise am Gesamtsystem nach Theorie II. Ordnung wird auf DAfStb-Heft 600 verwiesen.

1.1 Allgemeines Verfahren nach EC 2, Kapitel 5.8.6

Die Schnittgrößen infolge Theorie II. Ordnung sind grundsätzlich nichtlinear zu ermitteln, d.h. mit den o.g. Werkstoffmodellen unter Berücksichtigung der Teilsicherheitsfaktoren für den GZT und den GZG. Als alternatives einfaches Hilfsmittel für die Bemessung von Stützen und Wänden wurde bereits das Modellstützenverfahren behandelt.

Wenn für die **Berechnung der Formänderungen** mit den o.g. Spannungs-Dehnungs-Linien **Bemessungswerte** verwendet werden($\alpha \cdot f_{ck}/\gamma_c \quad E_{cm}/\gamma_{CE}$), dann darf damit auch der **Bemessungswert der Tragfähigkeit direkt** ermittelt werden.

Abweichend hiervon dürfen nach **EC2 NA die Formänderungen für die Theorie II. Ordnung auch mit den Mittelwerten der Baustoffkennwerte** (z.B. $f_{cm}/\gamma_c \quad E_{cm}/\gamma_{CE}$) ermittelt werden. Allerdings muss dann im Nachgang zusätzlich ein Nachweis der Grenztragfähigkeit im kritischen Querschnitt mit den üblichen Bemessungswerten (wie z.B. $f_{cd} = \alpha \cdot f_{ck}/\gamma_c$) durchgeführt werden!

Sicherheitsfaktor für den E-Modul: $\gamma_{CE} = 1{,}5$ (EC2 allgemein und Aussteifung: $\gamma_{CE} = 1{,}2$)

Ein Vergleich für Beton C30/37 und Betonstahl B500A soll die Unterschiede für die Verformungsberechnung nach Theorie II. Ordnung im GZT verdeutlichen:

Bemessungswerte nach EC2 NA:

$$f_c = \alpha \cdot f_{ck}/\gamma_c = 0{,}85 \cdot 30/1{,}5 = 17{,}0 \cdot MN/m^2$$
$$f_y = f_{yk}/\gamma_s = 500/1{,}15 = 435 \cdot MN/m^2$$
$$E_{cd} = E_{cm}/\gamma_{CE} = 33000/1{,}5 = 22000 \cdot MN/m^2$$

Keine Bemessung mehr erforderlich.

Mittelwerte nach EC2 NA:

$$f_c = f_{cm}/\gamma_c = (f_{ck} + 8)/\gamma_c = 38/1{,}5 = 25{,}333 \cdot MN/m^2$$
$$f_y = f_{yk} = 500 \cdot MN/m^2$$
$$E_{cd} = E_{cm}/\gamma_{CE} = 33000/1{,}5 = 22000 \cdot MN/m^2$$

Beim Stahl gilt hierbei wegen der geringen Streuung der Festigkeiten $\gamma_s = 1{,}0$. (Heft 600)

Zusätzlich ist dann noch ein Nachweis der Querschnittstragfähigkeit erforderlich mit den Bemessungswerten:

$$f_{cd} = \alpha \cdot f_{ck}/\gamma_c = 0{,}85 \cdot 30/1{,}5 = 17{,}0 \cdot MN/m^2$$
$$f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s = 500/1{,}15 = 435 \cdot MN/m^2$$

Der Vorteil der Regelung nach EC2 (Bemessungswerte) liegt darin, dass das gleiche Materialgesetzt sowohl für die Berechnung der Formänderungen wie auch für den Nachweis im Grenzzustand der Tragfähigkeit benutzt werden kann. Der Nachweis gilt dann als erbracht, wenn das System stabil bleibt. Eine nachträgliche Bemessung ist dann nicht mehr erforderlich.

Die Mitwirkung des Betons auf Zug zwischen den Rissen (tension stiffening) darf vernachlässigt werden, wenn die Auswirkungen günstig wirken.

1.3 Imperfektionen

Imperfektionen sind wie bei der normalen Stützenberechnung über den Ansatz einer **Schiefstellung in ungünstigster Richtung** zu berücksichtigen:

$\Theta_i = \Theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$	Schiefstellung im Bogenmaß
$\Theta_0 = 1/200$	Grundwert der Schiefstellung
$0 \le \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l_{col}}} \le 1$	Abminderungsbeiwert für die Höhe h
$\alpha_m = \sqrt{0{,}5 \cdot (1 + 1/m)}$	Abminderungsbeiwert für die Anzahl der lastabtragenden Bauteile

Hierbei ist m die Anzahl der lotrechten, lastabtragenden, in einem Geschoss nebeneinanderliegenden Bauteile. Als lastabtragend gelten die Bauteile dann, wenn sie mind. 70 % der mittleren Längskraft $N_{Ed,m} = F_{Ed} / m$ aufnehmen, worin F_{Ed} die Summe aller Bemessungswerte der einwirkenden Längskräfte in dem betrachteten Geschoß bezeichnet.

Vereinfacht ergibt sich daraus die folgende Lastausmitte e_i: $e_i = \Theta_i \cdot \frac{l_0}{2}$

1.4 Kriechen

Kriechauswirkungen müssen bei Verfahren nach Theorie II. Ordnung berücksichtigt werden. Die Dauer der Belastungen darf vereinfacht mittels einer effektiven Kriechzahl φ_{ef} berücksichtigt werden. Zusammen mit der Bemessungslast ergibt diese eine Kriechverformung (Krümmung), die der quasi-ständigen Beanspruchung entspricht:

$$\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0) \cdot \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}} \quad \text{(EC2 5.19)}$$

$\varphi(\infty, t_0)$	die Endkriechzahl;
M_{0Eqp}	Biegemoment nach Theorie I. Ordnung unter der quasi-ständigen Einwirkungskombination (GZG);
M_{0Ed}	Biegemoment nach Theorie I. Ordnung unter der Bemessungs-Einwirkungskombination (GZT).

Die Biegemomente M_{0Eqp} und M_{0Ed} in Gleichung (5.19) beinhalten die Imperfektionen, die bei Nachweisen nach Theorie II. Ordnung zu berücksichtigen sind (NA).

ANMERKUNG Es besteht auch die Möglichkeit, φ_{ef} auf Grundlage der Gesamtbiegemomente M_{Eqp} und M_{Ed} zu ermitteln. Dies bedarf allerdings der Iteration und des Nachweises der Stabilität unter quasi-ständiger Belastung mit $\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0)$.

Wenn M_{0Eqp} / M_{oEd} in einem Bauteil oder Tragwerk variiert, darf das Verhältnis für den Querschnitt mit dem maximalen Moment berechnet oder ein repräsentativer Mittelwert verwendet werden.

Die **Kriechauswirkungen dürfen vernachlässigt** werden ($\varphi_{ef} = 0$), wenn die folgenden drei Bedingungen eingehalten werden:

$$\varphi(\infty, t_0) \leq 2 \qquad \lambda \leq 75 \qquad \frac{M_{0Ed}}{N_{Ed}} \geq h$$

Dabei ist M_{0Ed} das Moment nach Theorie I. Ordnung und *h* ist die Querschnittshöhe in der entsprechenden Richtung.

Kriechauswirkungen dürfen in der Regel auch vernachlässigt werden, wenn die Stützen an beiden Enden monolithisch mit lastabtragenden Bauteilen verbunden sind oder wenn bei verschiebliehen Tragwerken die Schlankheit des Druckgliedes $\lambda \leq 50$ und gleichzeitig die bezogene Lastausmitte $\frac{e_0}{h} > 2$, das bedeutet auch $\frac{M_{0Ed}}{N_{Ed}} > 2h$ ist.

Da sich der Beton durch Kriechen verkürzt, kann dies mit guter Näherung für lineares Kriechen durch Strecken der σ-ε–Linie des Betons berücksichtigt werden:

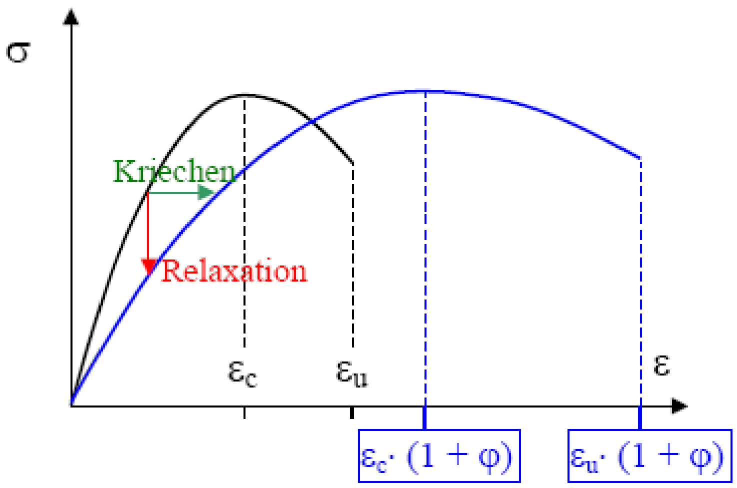


Bild: Berücksichtigung von Kriechen durch Modifizieren der σ-ε–Linie des Betons.

2. Berechnung einer Momenten-Krümmungs-Linie

Die Randdehnungen eines Querschnitts ergeben sich (wie bekannt) aus dem inneren Gleichgewicht. Das folgende Bild zeigt die geometrischen Zusammenhänge eines Stabelementes der Länge dx.

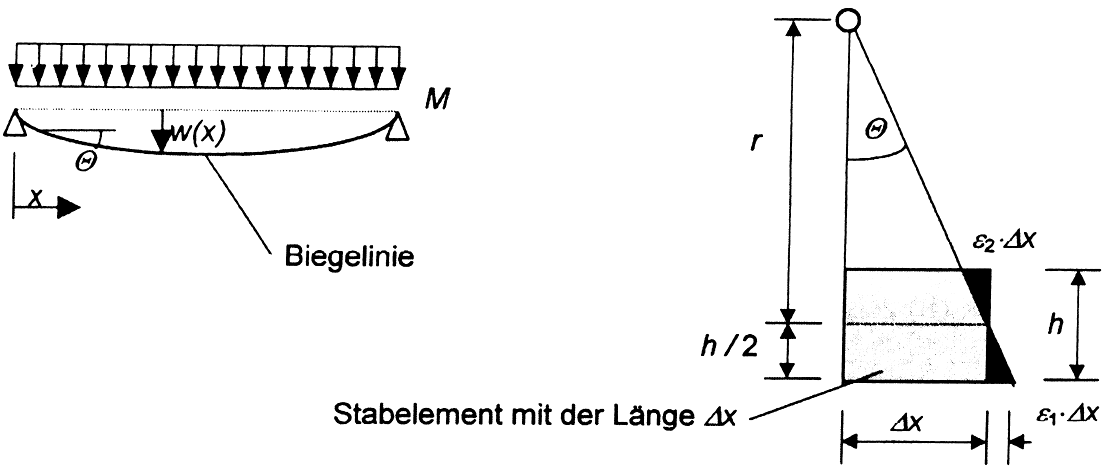


Bild: Beziehung zw. Krümmung und Dehnung an einem Stabelement

Bei sehr kleinen Rotationswinkeln gilt: $\tan\Theta \approx \Theta$ (2.1)

Die Krümmung ist definiert zu: $\kappa = \dfrac{1}{r}$ (2.2)

Damit ergibt sich: $\Theta = \dfrac{\Delta x}{r} = \Delta x \cdot \kappa = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \cdot \dfrac{\Delta x}{h}$ (2.3)

Aus der Statik ist bekannt: $\kappa = \dfrac{M}{EI}$ (2.4)

Durch Kombination der Gleichungen 2.1 bis 2.4 erhält man eine Beziehung zwischen Moment, Krümmung und den Randdehnungen. Den typischen Verlauf eines Momenten-Krümmungs-Diagramms **für eine feste Normalkraft** zeigt das folgende Bild:

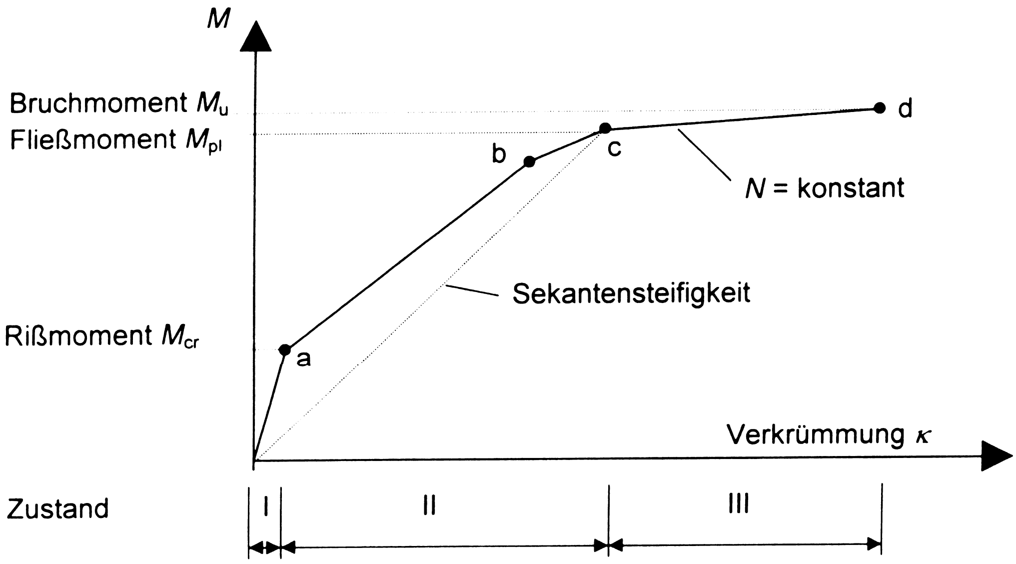


Bild: Vereinfachte Momenten-Krümmungs-Kurve bei konstanter Normalkraft

Es sind 4 charakteristische Punkte (a – d) zu erkennen:

Punkt a wird beim **Aufreißen des Querschnitts** erreicht. Das zugehörige Rissmoment ohne Stahlanteil errechnet sich zu: $M_{cr} = (f_{ctm} - \frac{N}{A_c}) \cdot W_c$

Die zugehörige Krümmung unter Vernachlässigung des Stahls ergibt sich zu: $\kappa = \frac{M_{cr}}{(EI)^I}$

Die Steigung der Geraden zum Punkt a repräsentiert die Biegesteifigkeit im Zustand I.

Punkt b kennzeichnet den Beginn des **Fließens der Druckbewehrung**.

Am **Punkt c** nimmt die Krümmung deutlich zu, ohne dass das aufnehmbare Moment ebenfalls stark zunimmt. Denn hier beginnt die **Zugbewehrung zu fließen**. Das zugehörige Moment wird als Fließmoment des Querschnitts bezeichnet.

Die **größt mögliche Krümmung** des Querschnitts (**Punkt d**) wird erst erreicht, wenn die **Betonstauchung maximal** wird (meist -3,5 ‰).

Die Krümmung kann selbstverständlich für einen beliebigen Punkt zw. a und d für eine bestimmte Normalkraft durch Variation der Dehnungsebene ermittelt werden, bis die Summe der H-Kräfte = 0 ist. Das zugehörige Moment ergibt sich dann aus Summe M = 0. Der Punkt b muss nicht immer auftreten.

Da stabförmige Bauteile unter Längsdruck fast immer wechselseitig belastet sind, werden sie so gut wie immer symmetrisch bewehrt.

Am folgenden Beispiel soll die Berechnung einer Momenten-Krümmungs-Beziehung gezeigt werden. Hierbei werden für 3 bestimmte Dehnungszustände (Punkte a, c und d wie oben) das zugehörige Moment und die zugehörige Krümmung für eine bestimmte Normalkraft berechnet. Um die Rechnung zu vereinfachen, wird anstatt dem o.g. Werkstoffgesetz das Parabel-Rechteck-Diagramm für den Beton verwendet, beim Stahl wird ein Anstieg im Verfestigungsbereich nicht berücksichtigt.

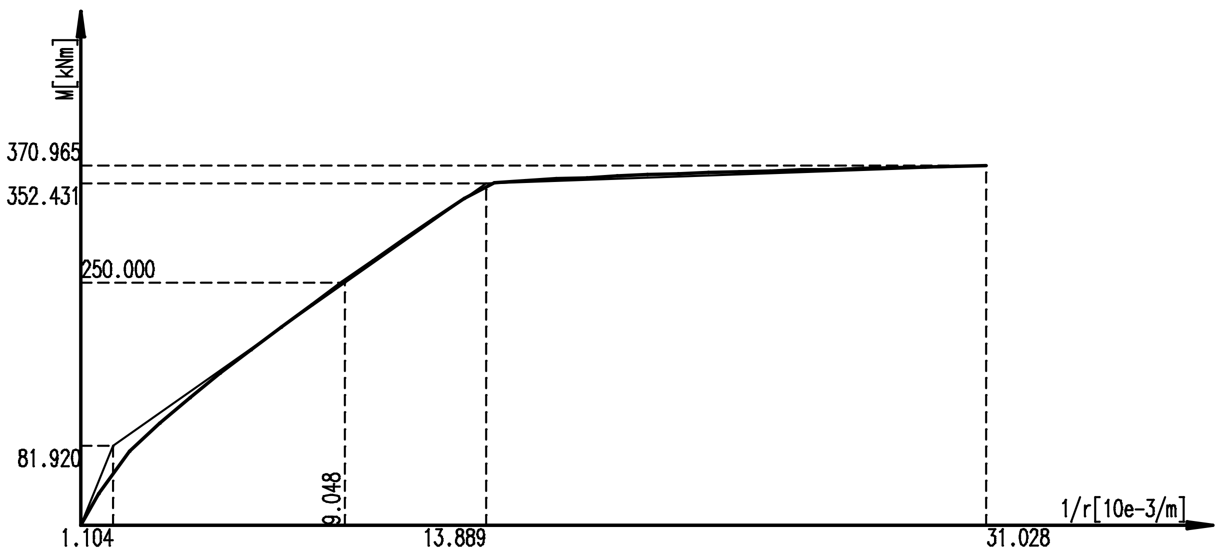


Bild: trilineare Momenten-Krümmungs-Beziehung im Vergleich mit der genauen Berechnung

Gegeben: symmetrisch bewehrter Rechteckquerschnitt b/h = 40/40 cm
Beton C30/37, Betonstahl BSt 500 SA
$A_{s1} = A_{s2} = 15{,}7\ cm^2$, $d_1 = d_2 = 4$ cm, $N_{Ed} = -600$ kN.
Werkstoffgesetze: Parabel mit Bemessungswerten, Stahl ohne Verfestigung, kein Kriechen.

Gesucht: Momenten-Krümmungs-Linie

Punkt a: Die Betonzugfestigkeit auf der Zugseite wird überschritten.

Das zugehörige Moment kurz vor dem Aufreißen des Querschnitts (Rissmoment) wird im Zustand I berechnet, d.h. mit ideellen Querschnittswerten. Zum Vergleich wird es auch ohne Berücksichtigung des Stahls ermittelt.

Vorwerte: $n := \frac{E_s}{E_{cm}} = 6.061$

Betonbruttowerte: $A_1 := b \cdot h = 1600 \cdot cm^2$ $\quad z_1 := h \cdot 0.5 = 20 \cdot cm$ $\quad I_1 := \frac{b \cdot h^3}{12} = 213333.3 \cdot cm^4$

$$M_{RdRiß} := \left(f_{ctm} - \frac{N_{Ed}}{A_1}\right) \cdot \frac{I_1}{z_1} = 70.933 \cdot kN \cdot m$$

$$\sigma_o := \frac{N_{Ed}}{A_1} + \frac{M_{RdRiß}}{I_1} \cdot (-z_1) = -10.4 \cdot \frac{MN}{m^2} \qquad \varepsilon_o := \frac{\sigma_o}{E_{cm}} = -0.000315152 \qquad \varepsilon_u := \frac{f_{ctm}}{E_{cm}} = 0.000087879$$

$$\kappa := \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_o}{h} = 0.001007576 \cdot \frac{1}{m}$$

mit ideellen Querschnittswerten

As,oben: $A_2 := (n-1) \cdot A_{s2} = 79.452 \cdot cm^2$ $\quad z_2 := d_1 = 4 \cdot cm$

As,unten: $A_3 := (n-1) \cdot A_{s1} = 79.452 \cdot cm^2$ $\quad z_3 := h - d_2 = 36 \cdot cm$ $\quad z_s := \frac{z_1 \cdot A_1 + z_2 \cdot A_2 + z_3 \cdot A_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \underline{20 \cdot cm}$ Mitte

$$I_i := I_1 + A_1 \cdot (z_s - z_1)^2 + A_2 \cdot (z_s - z_2)^2 + A_3 \cdot (z_s - z_3)^2 \qquad I_i = 0.00254\,m^4$$

$$A_{cn} := A_1 - A_{s2} - A_{s1} = 1568.6 \cdot cm^2 \qquad \rho := \frac{A_{s2} + A_{s1}}{A_{cn}} = 0.020018 \qquad A_i := A_{cn} \cdot (1 + n \cdot \rho) = 1758.903 \cdot cm^2$$

$$z_{rand} := h - z_s = 20 \cdot cm \qquad M_{RdRiß} := \left(f_{ctm} - \frac{N_{Ed}}{A_i}\right) \cdot \frac{I_i}{z_{rand}} = 80.156 \cdot kN \cdot m$$

$$\sigma_o := \frac{N_{Ed}}{A_i} + \frac{M_{RdRiß}}{I_i} \cdot (-z_s) = -9.722 \cdot \frac{MN}{m^2} \qquad \varepsilon_o := \frac{\sigma_o}{E_{cm}} = -0.000294619$$

$$\sigma_u := \frac{N_{Ed}}{A_i} + \frac{M_{RdRiß}}{I_i} \cdot z_{rand} = 2.9 \cdot \frac{MN}{m^2} \qquad \varepsilon_u := \frac{\sigma_u}{E_{cm}} = 0.000087879$$

$$\kappa_{Riß} := \frac{\varepsilon_u - \varepsilon_o}{h} = 0.000956245 \cdot \frac{1}{m}$$

Punkt c: Stahl auf der Zugseite fließt.
Die Betondehnung muss so lange variiert werden, bis die Summe H = N_{Ed} ist. Dann ergeben sich das zugehörige Moment und die zugehörige Krümmung.

Vorwerte: $f_{cR} = 17 \cdot \frac{MN}{m^2}$ $\quad f_{yR} = 434.783 \cdot \frac{MN}{m^2}$ $\quad \varepsilon_{grenz} := \frac{f_{yR}}{E_s} = 0.0021739$

vorgegebene Stahldehnung: $\boxed{\varepsilon_{s1} := \varepsilon_{grenz} = 0.0021739}$ **iterierte Betondehnung:** $\varepsilon_c := -0.0019693$

$-1,97‰$

$$x := \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} \cdot d = 17.111 \cdot cm \qquad \varepsilon_{s2} := \frac{\varepsilon_c \cdot (x - d_1)}{x} = -0.001508943$$

$$\sigma_c(z) := f_{cR} \cdot \left[\frac{k \cdot \frac{\varepsilon_c \cdot z}{\varepsilon_{c1} \cdot x} - \left(\frac{\varepsilon_c \cdot z}{\varepsilon_{c1} \cdot x}\right)^2}{1 + (k-2) \cdot \frac{\varepsilon_c \cdot z}{\varepsilon_{c1} \cdot x}} \right] \qquad \sigma_c(x) = 16.901 \cdot \frac{MN}{m^2} \qquad F_{cd} := -\int_0^x b \cdot \sigma_c(z)\, dz = -808.9 \cdot kN$$

$$a := x - \frac{\int_0^x b \cdot z \cdot \sigma_c(z)\, dz}{-F_{cd}} = 6.7 \cdot cm$$

$$F_{sd1} := \text{if}\left(|\varepsilon_{s1}| > \varepsilon_{grenz}, f_{yR} \cdot A_{s1}, E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot A_{s1}\right) = 682.609 \cdot kN$$

$$F_{sd2} := \text{if}\left(|\varepsilon_{s2}| > \varepsilon_{grenz}, -f_{yR} \cdot A_{s2}, E_s \cdot \varepsilon_{s2} \cdot A_{s2}\right) = -473.808 \cdot kN \qquad SummeH := F_{cd} + F_{sd1} + F_{sd2} = -600.063 \cdot kN$$

Moment: $M_{Rdc} := -F_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - a\right) - F_{sd2} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_2\right) + F_{sd1} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_1\right) = 292.854 \cdot kN \cdot m$

Krümmung: $\kappa_c := \frac{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_c}{d} = 0.011508925\, m^{-1}$

Punkt d: Betondehnung auf der Druckseite ist voll ausgenutzt.
Durch Variation der Stahldehnung auf der Zugseite bis die Summe H = N_{Ed} ist ergeben sich das zugehörige Moment und die zugehörige Krümmung.

vorgegebene Betondehnung: $\boxed{\varepsilon_c := -0.0035}$ **iterierte Stahldehnung:** $\varepsilon_{s1} := 0.008073$

$8,07‰$

$$x := \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} \cdot d = 10.887 \cdot cm \qquad \varepsilon_{s2} := \frac{\varepsilon_c \cdot (x - d_1)}{x} = -0.002214111$$

$$\sigma_c(z) := f_{cR} \cdot \left[\frac{k \cdot \frac{\varepsilon_c \cdot z}{\varepsilon_{c1} \cdot x} - \left(\frac{\varepsilon_c \cdot z}{\varepsilon_{c1} \cdot x}\right)^2}{1 + (k-2) \cdot \frac{\varepsilon_c \cdot z}{\varepsilon_{c1} \cdot x}} \right] \qquad \sigma_c(x) = 14.694 \cdot \frac{MN}{m^2} \qquad F_{cd} := -\int_0^x b \cdot \sigma_c(z)\, dz = -600.1 \cdot kN$$

$$a := x - \frac{\int_0^x b \cdot z \cdot \sigma_c(z)\, dz}{-F_{cd}} = 4.7 \cdot cm$$

$$F_{sd1} := \text{if}\left(|\varepsilon_{s1}| > \varepsilon_{grenz}, f_{yR} \cdot A_{s1}, E_s \cdot \varepsilon_{s1} \cdot A_{s1}\right) = 682.609 \cdot kN$$

$$F_{sd2} := \text{if}\left(|\varepsilon_{s2}| > \varepsilon_{grenz}, -f_{yR} \cdot A_{s2}, E_s \cdot \varepsilon_{s2} \cdot A_{s2}\right) = -682.609 \cdot kN \qquad SummeH := F_{cd} + F_{sd1} + F_{sd2} = -600.057 \cdot kN$$

Moment: $M_{Rdd} := -F_{cd} \cdot \left(\frac{h}{2} - a\right) - F_{sd2} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_2\right) + F_{sd1} \cdot \left(\frac{h}{2} - d_1\right) = 310.178 \cdot kN \cdot m$

Krümmung: $\kappa_d := \frac{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_c}{d} = 0.032147222\, m^{-1}$

3. Rechengang

Eine Bemessung von Querschnitten nach Theorie II. Ordnung ist nicht möglich, da für die Berechnung der Momenten-Krümmungs-Beziehung der **Stahl im voraus schon bekannt sein muss**. Deshalb muss der Stahl im Voraus geschätzt und nach der Rechnung evtl. korrigiert werden, wodurch zwangsweise **eine iterative Berechnung** erforderlich ist. Eine ausreichende Sicherheit ist vorhanden, wenn die unter Berücksichtigung der Verformung ermittelten Schnittgrößen an jeder Stelle des Tragwerks kleiner sind als der Querschnittswiderstand. Da die Normalkraft fast immer Stabweise konstant ist, folgt:

$$M_{tot} = M_{Ed} + N_{Ed} \cdot e_{tot} \quad \leq \quad M_{Rd}$$

Die Gesamtlastausmitte e_{tot} ergibt sich zu **$e_{tot} = e_0 + e_a + e_2$**

e_0 planmäßige Ausmitte nach Theorie I. Ordnung, i.A. $e_0 = M_{Ed1}/N_{Ed}$
e_2 Lastausmitte infolge Theorie II. Ordnung incl. Kriechauswirkungen
e_i ungewollte Lastausmitte infolge Imperfektionen in ungünstigster Richtung

$e_a = \Theta_i \cdot \frac{l_0}{2}$ $\Theta_i = \Theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$ Schiefstellung der Stütze im Bogenmaß

$\Theta_0 = 1/200$ $0 \leq \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l_{col}}} \leq 1$ Abminderungsbeiwert für die Höhe h

$\alpha_m = \sqrt{0{,}5 \cdot (1 + 1/m)}$ Abminderungsbeiwert für die Anzahl der lastabtragenden Bauteile

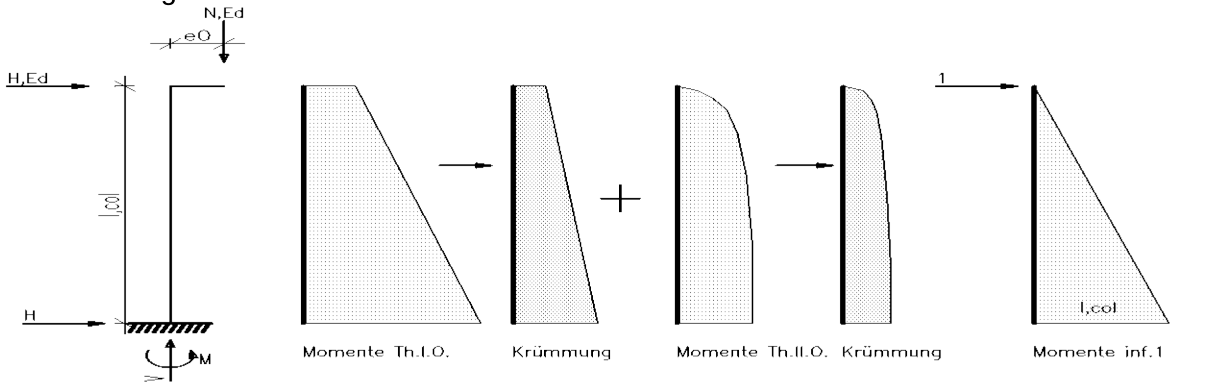
Hierbei ist m die Anzahl der lotrechten, lastabtragenden, in einem Geschoss nebeneinanderliegenden Bauteile. Als lastabtragend gelten die Bauteile dann, wenn sie mind. 70 % der mittleren Längskraft $N_{Ed,m} = F_{Ed}/m$ aufnehmen, worin F_{Ed} die Summe aller Bemessungswerte der einwirkenden Längskräfte in dem betrachteten Geschoß bezeichnet.

Die Gesamtverformung e_2 lässt sich mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte berechnen:

$$e_2 = \int_0^l \frac{M_{tot}}{EI} \cdot \overline{M} \cdot dx = \int_0^l \kappa(x) \cdot \overline{M} \cdot dx$$

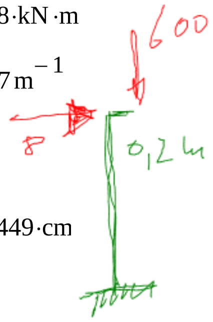
e_2 hängt somit vom Krümmungsverlauf ab, welcher wiederum wie oben dargestellt bei konstantem Querschnitt hauptsächlich von der Bewehrung und von der Normalkraft abhängt. Das folgende einfache Beispiel einer Kragstütze soll den Rechengang verdeutlichen:

Gegeben ist die unten dargestellte Kragstütze mit dem Querschnitt des Beispiels oben, so dass die trilineare Momenten-Krümmungslinie vorhanden ist. Es ist zu erkennen, dass der Krümmungsverlauf innerhalb der mittleren Geraden des trilinearen Diagramms liegt, wodurch sich die Integration beträchtlich vereinfacht.



Beispiel Kragstütze $M_{RdRiß} = 80.156\cdot kN\cdot m$ $M_{Rdc} = 292.854\cdot kN\cdot m$ $M_{Rdd} = 310.178\cdot kN\cdot m$

$\kappa_{Riß} = 0.000956\,m^{-1}$ $\kappa_c = 0.011509\,m^{-1}$ $\kappa_d = 0.032147\,m^{-1}$



Höhe: $l_k := 6.0m$ $N_{Ed} = -600\cdot kN$ $e_0 := 0.20\cdot m$ $H_{Ed} := 8\cdot kN$

$l_0 := 2\cdot l_k = 12\,m$ $\alpha_{a1} := \min\left(0.005, \frac{1}{100\cdot\sqrt{\frac{l_k}{m}}}\right) = 0.004082$ $e_a := \alpha_{a1}\cdot\frac{l_0}{2} = 2.449\cdot cm$

Moment nach Theorie I. Ordnung + Schiefstellung:

Moment am Kopf der Stütze: $M_{Edo} := |N_{Ed}|\cdot(e_0) = 120\cdot kN\cdot m$

Moment am Fuß der Stütze: $M_{Edu} := |N_{Ed}|\cdot(e_0 + e_a) + H_{Ed}\cdot l_k = 182.697\cdot kN\cdot m$

Ermittlung der Kopfverformung durch Integration (Koppeln): $M_1 := 1\cdot l_k = 6\,m$

Krümmung auf Gerade 2 für die Momente:

$M := M_{Edo}$ $\kappa_{2o} := \kappa_{Riß} + \frac{\kappa_c - \kappa_{Riß}}{M_{Rdc} - M_{RdRiß}}\cdot(M - M_{RdRiß}) = 0.00293303\cdot\frac{1}{m}$

$M := M_{Edu}$ $\kappa_{21u} := \kappa_{Riß} + \frac{\kappa_c - \kappa_{Riß}}{M_{Rdc} - M_{RdRiß}}\cdot(M - M_{RdRiß}) = 0.006043651\cdot\frac{1}{m}$

Koppeln Trapez mit Dreieck: $e_{21} := \frac{1}{6}\cdot M_1\cdot l_k\cdot(2\cdot\kappa_{21u} + \kappa_{2o}) = 9.012\cdot cm$

iterativ geschätzt: $e_2 := 16.28\cdot cm$

Moment am Kopf der Stütze: $M_{Edo} := |N_{Ed}|\cdot(e_0) = 120\cdot kN\cdot m$

Moment am Fuß der Stütze: $M_{Edu} := |N_{Ed}|\cdot(e_0 + e_a + e_2) + H_{Ed}\cdot l_k = 280.377\cdot kN\cdot m$

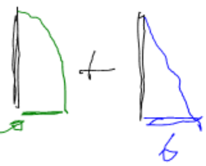
Ermittlung der Kopfverformung durch Integration (Koppeln): $M_1 := 1\cdot l_k = 6\,m$

Krümmung auf Gerade 2 für die Momente:

$M := M_{Edo}$ $\kappa_{2o} := \kappa_{Riß} + \frac{\kappa_c - \kappa_{Riß}}{M_{Rdc} - M_{RdRiß}}\cdot(M - M_{RdRiß}) = 0.00293303\,m^{-1}$

$M := M_{Edu}$ $\kappa_{22u} := \kappa_{Riß} + \frac{\kappa_c - \kappa_{Riß}}{M_{Rdc} - M_{RdRiß}}\cdot(M - M_{RdRiß}) = 0.010889908\,m^{-1}$

Differenzkrümmung für den Parabelanteil: $\Delta\kappa := \kappa_{22u} - \kappa_{21u} = 0.004846257\cdot\frac{1}{m}$



Koppeln Parabel mit Dreieck: $e_{22} := e_{21} + \frac{5}{12}\cdot M_1\cdot l_k\cdot\Delta\kappa = 16.282\cdot cm$

Die Verformungen vergrößern sich nicht mehr, das System ist somit stabil.

Das größte Moment am Stützenfuß ist kleiner als der Querschnittswiderstand. $M_{Edu} = 280.377\cdot kN\cdot m$ <

Damit ist der Querschnitt tragfähig. $M_{Rdd} = 310.178\cdot kN\cdot m$

WinCADES: $M_{Ed} = 277,5$ kNm

$f = 15,8$ cm

Wie man unschwer erkennt, kann der gezeigte Rechengang sehr aufwändig werden. Im Normalfall wird die Erstellung der **Momenten-Krümmungs-Beziehungen**, die ja jeweils **für eine bestimmte Normalkraft und eine bestimmte Bewehrung** erstellt werden müssen, und die Integration der Krümmungen über den Stab mit Hilfe von speziellen EDV-Programmen gemacht. Zum Zweck der Vordimensionierung und der Kontrolle der Programmergebnisse ist es aber trotzdem sinnvoll, einfache Rechengänge zu kennen.

Vergleicht man die Krümmungen von einem symmetrisch bewehrten Querschnitt mit konstanter Normalkraft bei unterschiedlichem Bewehrungsgrad, so kann man erkennen, dass **die Krümmung bei Fließen der Bewehrung nur unwesentlich vom Bewehrungsgrad abhängt**. Das bedeutet, dass man für den Grenzzustand der Tragfähigkeit ohne größeren Fehler auch mit einer mittleren konstanten Krümmung rechnen kann.

Staffelt man nun noch die Bewehrung über die Stablänge so, dass sich **überall im Stab mindestens die Fließkrümmung** einstellt, dann kann man die **Verformungen durch Koppeln der Momentenlinie mit einer konstanten Krümmungslinie ermitteln**! Da die Bewehrung meistens ungestaffelt über die Stablänge ausgeführt wird, liegt man etwas **auf der sicheren Seite**.

Vorgehensweise:

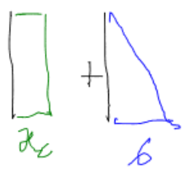
- Schätzen der Krümmung für eine bestimmte Normalkraft und die zug. Bewehrung. Dies setzt voraus, dass man die Krümmungen für viele verschiedene Querschnitte und Normalkräfte z.B. tabellarisch zur Verfügung hat, was bis jetzt durch die Quast-Tabellen im Heft 220 gegeben war.
- Annahme gestaffelter Bewehrung über den Bereich konstanter Normalkraft, d.h. Annahme einer konstanten Krümmung.
- Ermitteln der Verschiebungen durch Koppeln der Krümmung mit der M-Linie, hieraus Berechnung der Momente nach Theorie II. Ordnung.
- Bemessung des Querschnitts.
- Kontrolle der geschätzten Krümmung, u.U. Neuberechnung.

Für das Beispiel oben kann man z.B. die Krümmung im Punkt c annehmen, da ab dort kaum noch eine Steigerung des Momentes möglich ist:

mittlere Krümmung: $\kappa_c = 0.011509\,m^{-1}$ Bruchmoment: $M_{Rdd} = 310.178 \cdot kN \cdot m$

Kopfverschiebung = Koppeln der Krümmung mit der M1-Linie: $e_2 := 0.5 \cdot \kappa_c \cdot M_1 \cdot l_k = 20.716 \cdot cm$

Moment am Fuß der Stütze: $M_{Ed} := |N_{Ed}| \cdot (e_0 + e_a + e_2) + H_{Ed} \cdot l_k = 306.993 \cdot kN \cdot m$



Querschnittsabmessungen: $h = 0.4\,m$ $b = 0.4\,m$ $d_1 = 0.04\,m$

Bemessung: $\gamma_c := 1.5$ $\gamma_s := 1.15$ $f_{yd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 434.783 \cdot \frac{MN}{m^2}$ $f_{cd} := \frac{\alpha \cdot f_{ck}}{\gamma_c} = 17 \cdot \frac{MN}{m^2}$

$\frac{d_1}{h} = 0.1$ $\mu_{Ed} := \frac{M_{Ed}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} = 0.282$ $\nu_{Ed} := \frac{N_{Ed}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} = -0.221$

aus Diagramm abgelesen: $\omega := 0.5$ $A_{stot} := \frac{\omega \cdot b \cdot h \cdot f_{cd}}{f_{yd}} = 31.28 \cdot cm^2$

4. Statisch bestimmte gekoppelte Systeme

Gekoppelte Systeme kommen sehr häufig im Fertigteilhallenbau vor, wo eine Stütze z.B. in ein Fundament eingespannt wird und die restlichen Stützen einer Achsrichtung über die Binder an diese Stütze angekoppelt ist. Da die angekoppelten Stützen ebenfalls infolge Schiefstellung Einflüsse nach Theorie II. Ordnung bringen, müssen diese bei der Dimensionierung der Aussteifungsstütze berücksichtigt werden.

Dies kann z.B. durch eine Erhöhung der Knicklänge erfolgen (siehe Petersen Stahlbau) oder durch eine direkte Einbeziehung der angekoppelten Stützen in die Berechnung durch Ansatz von Abtriebskräften:

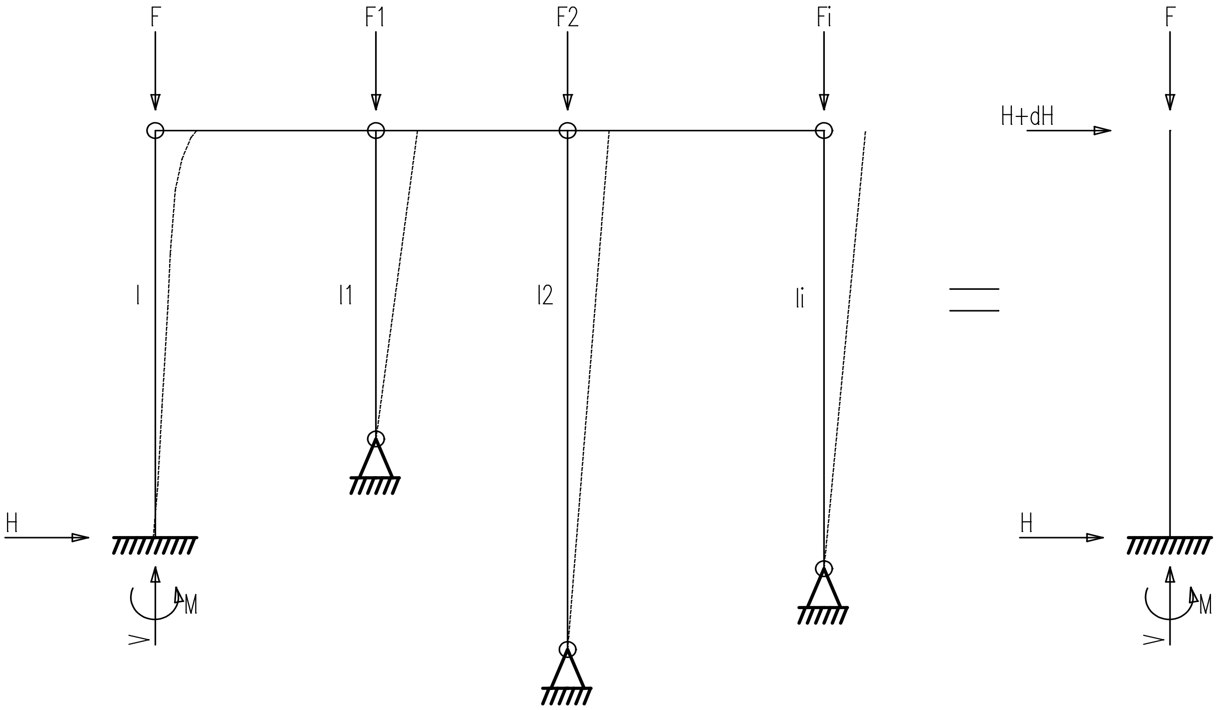


Bild: Statisches System

Wie man erkennen kann, ergibt die Summe aller schiefgestellten Pendelstützen eine Zusätzliche Horizontallast auf die Aussteifungsstütze. Betrachtet man das Krafteck an einem Knoten i einer Pendelstütze, dann kann man die Abtriebskraft einfach berechnen.

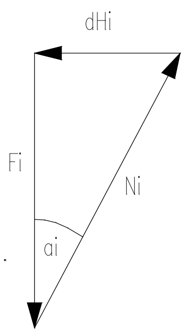


Bild: Krafteck am Knoten i

Schiefstellungswinkel je Pendelstütze: $\tan \alpha_i = \frac{\Delta H_i}{F_i} = \frac{f_i}{l_i}$

Daraus folgt: $\Delta H_i = F_i \cdot \frac{f_i}{l_i}$

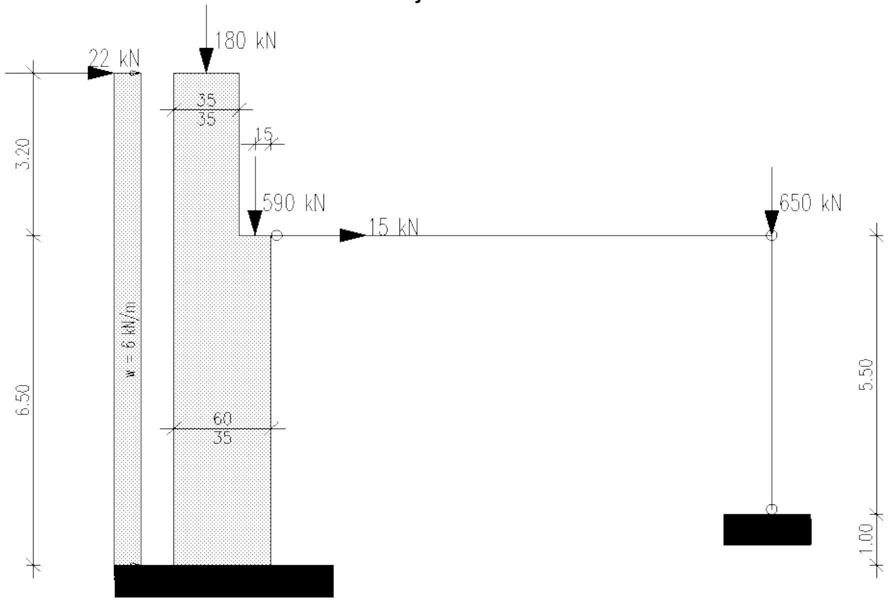
Mit diesen Abtriebskräften sollten im Allgemeinen die Zusatzmomente der Aussteifungsstütze berechnet werden. Für einfache Systeme wie das oben gezeigte, bei dem z.B. die Abtriebskräfte auf einer Geraden liegen, lässt sich die Berechnung systematisieren:

Gesamtabtriebskraft: $\Delta H = \sum \Delta H_i = \sum F_i \cdot \frac{f_i}{l_i}$

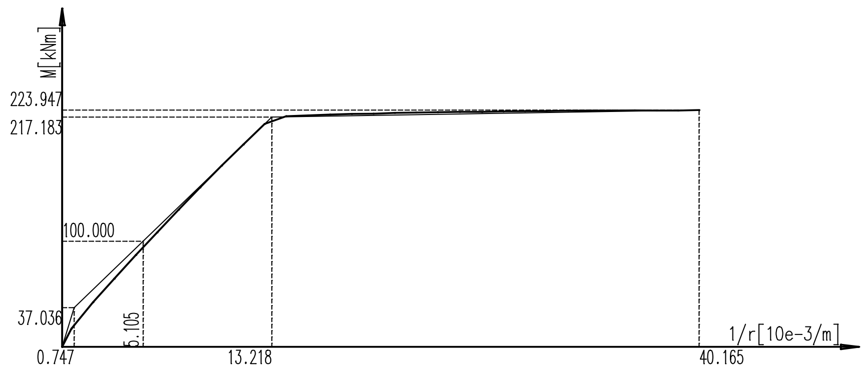
Gesamtzusatzmoment am Stützenfuß: $\Delta M = \sum \Delta M_i = \sum \Delta H_i \cdot l = \sum F_i \cdot f_i \cdot \frac{l}{l_i}$

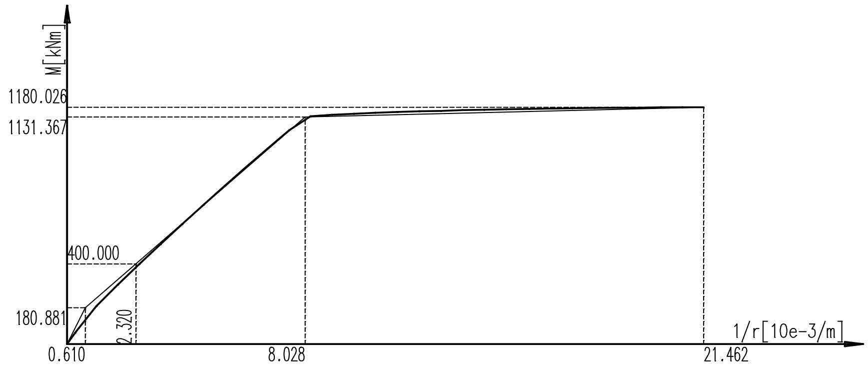
Das folgende Beispiel soll die Vorgehensweise demonstrieren: Das dargestellte System setzt sich aus einer Aussteifungsstütze mit Kranbahn und einer angekoppelten Stütze zusammen. Die dargestellten Lasten sind **Design-Lasten für einen best. Lastfall**. Näherungsweise kann von **gestaffelter Bewehrung** ausgegangen werden. Es soll nachgewiesen werden, dass die Aussteifungsstütze für diesen Lastfall hält.

Baustoffe: C30/37, S500A
Querschnitte: unten: 60/35 mit je 8ø28/Seite
Oben: 35/35 mit je 3ø28/Seite



Für die beiden Querschnitte der Aussteifungsstütze wurden die folgenden Momenten-Krümmungs-Linien ermittelt:





Für die Berechnung der Zusatzmomente nach Theorie II. Ordnung wird von einer mittleren konstanten Krümmung über den jeweiligen Stababschnitt ausgegangen (=Punkt c), d.h. von gestaffelter Bewehrung. Der Nachweis der Aussteifungsstütze erfolgt dadurch, dass das jeweilige Einspannmoment der 2 Stababschnitte nach Theorie II. Ordnung mit dem jeweiligen Bruchmoment verglichen wird. Kriechen wird vernachlässigt.

Normalkraft: $N_{Ed1} := -180 \cdot kN$ $\quad N_{Ed2} := -590 \cdot kN$ $\quad N_{Edges} := N_{Ed1} + N_{Ed2} = -770\ kN$

$N_{Ed3} := -650 \cdot kN$ $\quad w_{Ed} := 6 \cdot \frac{kN}{m}$ $\quad H_{Ed1} := 22 \cdot kN$ $\quad H_{Ed2} := 15 \cdot kN$

Bewehrung: $A_{s11} := 18.5 \cdot cm^2$ $\quad A_{s12} := 49.3 \cdot cm^2$ $\quad \kappa_{c1} := 0.013218 \cdot \frac{1}{m}$ $\quad \kappa_{c2} := 0.008028 \cdot \frac{1}{m}$

Abmessungen: $l_{k2} := 6.50 \cdot m$ $\quad l_{k1} := 3.20 \cdot m$ $\quad l_3 := 5.50 \cdot m$

$e_{02} := 0.15 \cdot m$ $\quad e_{01} := -0.125 \cdot m$ $\quad l_{ges} := l_{k1} + l_{k2} = 9.7\ m$

Schiefstellung: $l_{01} := 2 \cdot l_{ges} = 19.4\ m$ $\quad l_{02} := 2 \cdot l_{k2} = 13\ m$

Imperfektion: $\Theta_0 := \frac{1}{200}$ $\quad n_s := 1$ $\quad \alpha_m := \sqrt{0.5 \cdot \left(1 + \frac{1}{n_s}\right)} = 1$ $\quad \alpha_h := \max\left(0, \min\left(1, \frac{2}{\sqrt{\frac{l_{ges}}{m}}}\right)\right) = 0.6422$

$\Theta_i := \Theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m = 0.0032108$ $\quad e_{i1} := \Theta_i \cdot l_{01} \cdot 0.5 = 3.114\ cm$

$\Theta_0 := \frac{1}{200}$ $\quad n_s := 1$ $\quad \alpha_m := \sqrt{0.5 \cdot \left(1 + \frac{1}{n_s}\right)} = 1$ $\quad \alpha_h := \max\left(0, \min\left(1, \frac{2}{\sqrt{\frac{l_{k2}}{m}}}\right)\right) = 0.7845$

$\Theta_i := \Theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m = 0.0039223$ $\quad e_{i2} := \Theta_i \cdot l_{02} \cdot 0.5 = 2.55\ cm$

Momente nach Theorie I. Ordnung:

am Fuß: $M_{3H1} := H_{Ed1} \cdot l_{ges} = 213.4\ kN \cdot m$ $\quad M_{3w} := w_{Ed} \cdot l_{ges}^2 \cdot 0.5 = 282.27\ kN \cdot m$

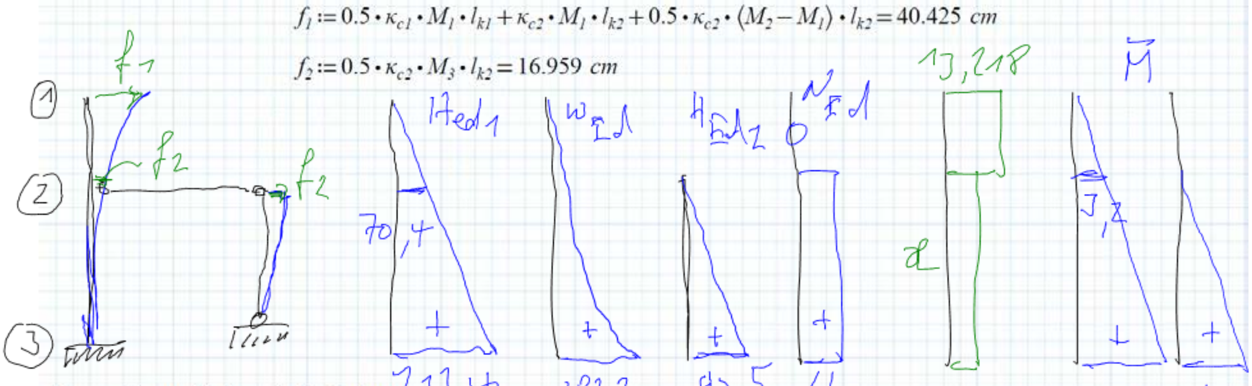
$M_{3H2} := H_{Ed2} \cdot l_{k2} = 97.5\ kN \cdot m$ $\quad M_{3N} := |N_{Ed1}| \cdot e_{01} + |N_{Ed2}| \cdot e_{02} = 66\ kN \cdot m$

am Querschnittssprung: $M_{2H1} := H_{Ed1} \cdot l_{k1}$ $\quad M_{2H1} = 70.4\ kN \cdot m$ $\quad M_{2w} := w_{Ed} \cdot l_{k1}^2 \cdot 0.5 = 30.72\ kN \cdot m$

Auslenkungen: $M_1 := 1 \cdot l_{k1} = 3.2\ m$ $\quad M_2 := 1 \cdot l_{ges} = 9.7\ m$ $\quad M_3 := 1 \cdot l_{k2} = 6.5\ m$

$f_1 := 0.5 \cdot \kappa_{c1} \cdot M_1 \cdot l_{k1} + \kappa_{c2} \cdot M_1 \cdot l_{k2} + 0.5 \cdot \kappa_{c2} \cdot (M_2 - M_1) \cdot l_{k2} = 40.425\ cm$

$f_2 := 0.5 \cdot \kappa_{c2} \cdot M_3 \cdot l_{k2} = 16.959\ cm$



Momente nach Theorie II. Ordnung:

Stelle 2: $M_{II2} := M_{2H1} + M_{2w} + (f_1 - f_2 + e_{i1} - e_{i2}) \cdot |N_{Ed1}| = 144.375\ kN \cdot m$

vorhandenes Bruchmoment: $M_u := 224 \cdot kN \cdot m$ $\quad > \quad M_{II2} = 144.375\ kN \cdot m$

Stelle 3: $M_{II3} := M_{3H1} + M_{3H2} + M_{3w} + M_{3N} + (f_1 + e_{i1}) \cdot |N_{Ed1}| + (f_2 + e_{i2}) \cdot |N_{Ed2}| + (f_2 + e_{i2}) \cdot |N_{Ed3}| \cdot \frac{l_{k2}}{l_3}$

vorhandenes Bruchmoment: $M_u := 1180 \cdot kN \cdot m$ $\quad > \quad M_{II3} = 1002.504\ kN \cdot m$

5. Statisch unbestimmte gekoppelte Systeme

Wie man schon bei statisch bestimmten Systemen erkennen konnte, ist eine genaue Rechnung nach Theorie II. Ordnung durch die erforderliche iterative Vorgehensweise sehr aufwändig. Bei statisch unbestimmten Systemen erhöht sich daher der Rechenaufwand weiter:

Da die Schnittgrößenverteilung im statisch unbestimmten System durch die Steifigkeiten des Tragwerks beeinflusst wird und die Steifigkeit wie schon gesehen durch die Bewehrungswahl, ergibt sich folgendes Vorgehen:

- Bewehrung vorab schätzen, daraus folgt die Steifigkeit (M-κ-Linie).
- Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung berechnen.
- Überprüfen, ob der Querschnittswiderstand an jeder Stelle des Tragwerks größer ist als die Schnittgrößen.
- Nein: Bewehrung entsprechend erhöhen, von vorne rechnen.
- Ja: System ist stabil, fertig; falls allerdings der Abstand zum Querschnittswiderstand zu groß ist, kann die Bewehrung evtl. reduziert werden!

Folgerungen:

- Durch geschickte Wahl der Bewehrung (Steifigkeiten) können die Schnittgrößen und Verformungen manipuliert werden.
- Es gibt beliebig viele (gute und schlechte) Möglichkeiten der Bewehrungsverteilung.