

Grenzzustand der Tragfähigkeit unter Berücksichtigung der Tragwerksverformung

1. Einleitung

Tragwerke verformen sich infolge von Beanspruchungen. Diese Verformungen können sehr unterschiedliche Auswirkungen auf das Kräftegleichgewicht haben. Dies soll am Beispiel eines Einfeldträgers erläutert werden:

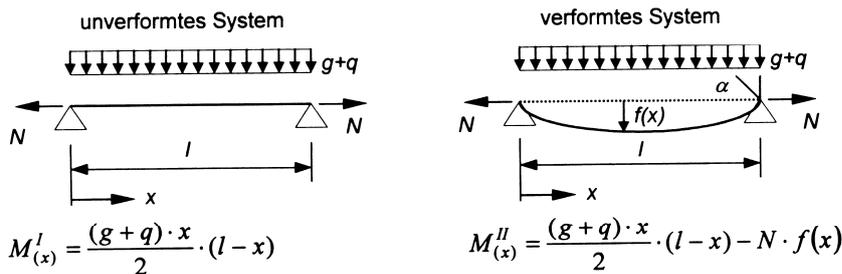


Bild: Einfluss der Verformung auf das Moment am Beispiel Einfeldträger

Wie man sieht werden die Momente im **unverformten** Zustand durch die Normalkraft nicht verändert. Bezüglich der Momente im **verformten** Zustand kann man folgendes erkennen:

- Wenn die Normalkraft $N = 0$ ist, dann hat die Verformung kaum Einfluss auf die Größe der Schnittgrößen.
- Eine Zugnormalkraft verkleinert das Moment $M^{II}(x)$, d.h. der Querschnitt wird entlastet. Dies liegt auf der sicheren Seite, sodass bei Zugnormalkräften auf eine Berücksichtigung der Verformung für das Gleichgewicht verzichtet werden kann.
- Durch eine Drucknormalkraft ($N < 0$) erhöht sich das Moment $M^{II}(x)$, d.h. die Verformung hat einen u.U. großen Einfluss auf die Standsicherheit des Tragwerks.

Die Summe aus dem Moment am unverformten System $M^I(x)$ (Moment nach Theorie I. Ordnung) und dem aus der Verformung resultierenden Zusatzmoment $M_2 = N \cdot f(x)$ wird als Moment nach Theorie II. Ordnung bezeichnet. Wenn das Zusatzmoment nicht allzu groß wird, dann braucht die Verformung nicht berücksichtigt zu werden.

Als allgemeines Kriterium hierfür gilt:

$$M_2 < 0,1 \cdot M^I$$

Für den dargestellten Einfeldträger kann M_2 für den maßgebenden Querschnitt bei $x = l/2$ als erste Näherung wie folgt berechnet werden:

$$M_2 = N \cdot f = \frac{N \cdot 5 \cdot (g+q) \cdot l^4}{384 \cdot EI}$$

Daraus ist ersichtlich, dass **das Zusatzmoment von der Steifigkeit EI des Bauteils und von der Normalkraft abhängt**. Infolge der nichtlinearen Materialeigenschaften von Beton und Stahl und infolge Rissbildung ist die Steifigkeit eines Stahlbetonquerschnitts lastabhängig, d.h. sie ist i.A. an jeder Stelle des Bauteils verschieden! Die Normalkraft ist meist innerhalb eines Stabes konstant.

Um das Verformungsverhalten eines Stahlbetonquerschnitts zu beschreiben, wird deshalb in der Regel **anstatt der Steifigkeit eine Beziehung zwischen Moment und Krümmung** (= Neigung der Dehnungsebene) für eine bestimmte Normalkraft benutzt.

Wenn die Zusatzschnittgrößen infolge Verformung sehr groß sind, dann kann es sein, dass ein Versagen des Bauteils nicht mehr durch Material-, sondern durch Stabilitätsversagen eintritt. Das folgende Diagramm verdeutlicht den Unterschied zwischen reinem Querschnittsversagen und Stabilitätsversagen:

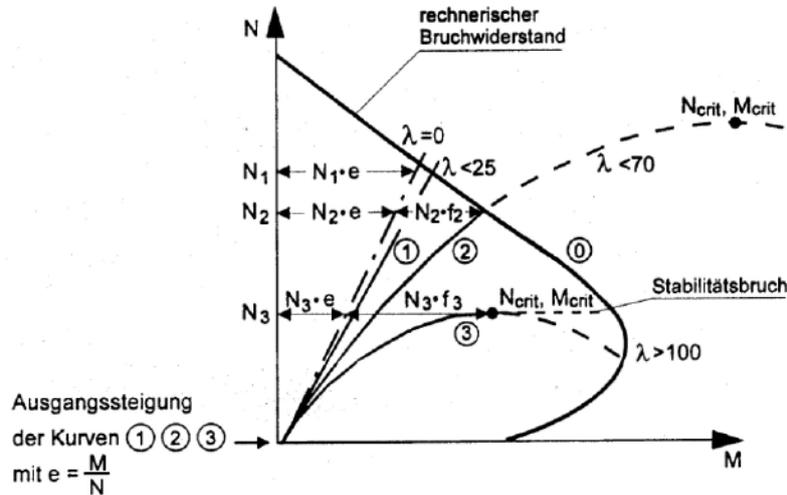


Bild: Einfluss der Schlankheit auf das Versagen eines Bauteils

Linie 1: Stütze mit kleiner Schlankheit (Gedrungene Stützen – $\lambda < 25$)

Der Einfluss der Stabverformung ist vernachlässigbar, das Versagen erfolgt durch Erreichen der Traglastkurve und führt zu einem Materialversagen.

Linie 2: Stütze mit mittlerer Schlankheit ($\lambda > 70$)

Die Stabverformung setzt die Traglast deutlich herab. Das Versagen erfolgt durch Erreichen der Traglastkurve und führt zu einem Materialversagen.

Linie 3: Stütze mit großer Schlankheit ($\lambda > 100$)

Das äußere Moment wächst mit zunehmender Stabverformung schneller als das aufnehmbare innere Moment (Querschnittswiderstand). Das Versagen erfolgt vor dem Erreichen der Materialfestigkeit. Es kommt zu einem Stabilitätsversagen.

2. Momenten-Krümmungs-Beziehung (M-Kappa-Diagramm)

Die Randdehnungen eines Querschnitts ergeben sich (wie bekannt) aus dem inneren Gleichgewicht. Das folgende Bild zeigt die geometrischen Zusammenhänge eines Stabelementes der Länge Δx .

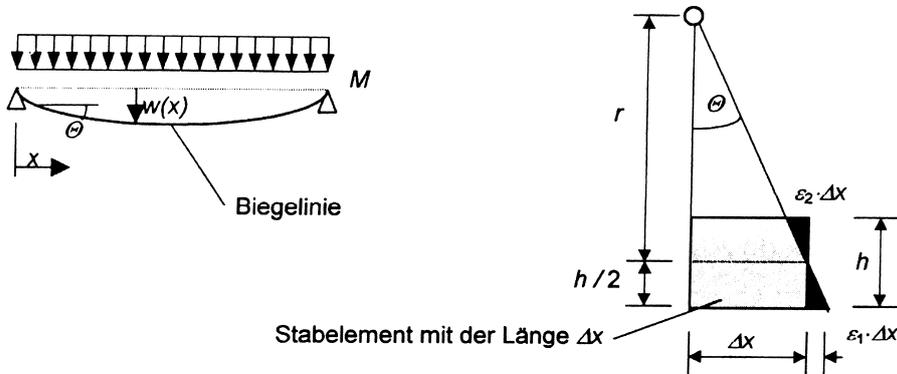


Bild: Beziehung zw. Krümmung und Dehnung an einem Stabelement

Bei sehr kleinen Rotationswinkeln gilt: $\tan \Theta \approx \Theta$

Die Krümmung ist definiert zu: $\kappa = \frac{1}{r}$

Damit ergibt sich: $\Theta = \frac{\Delta x}{r} = \Delta x \cdot \kappa = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \cdot \frac{\Delta x}{h}$

Aus der Statik ist bekannt: $\kappa = \frac{M}{EI}$

Durch Kombination der Gleichungen erhält man eine Beziehung zwischen Moment, Krümmung und den Randdehnungen. Den typischen Verlauf eines Momenten-Krümmungs-Diagramms für eine konstante Normalkraft zeigt das folgende Bild:

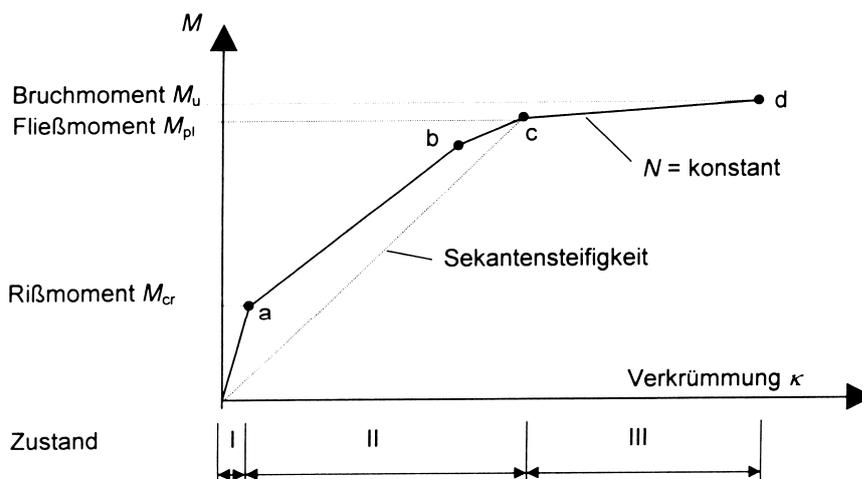
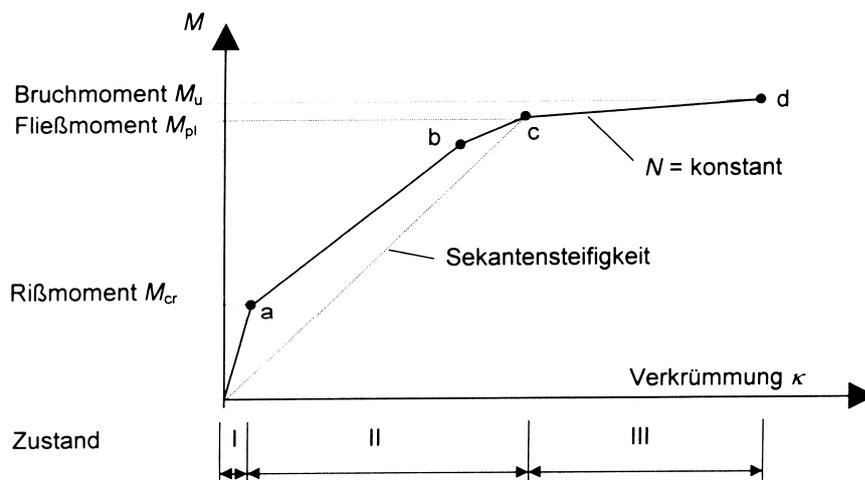


Bild: Vereinfachte Momenten-Krümmungs-Kurve bei konstanter Normalkraft



Es sind 4 charakteristische Punkte (a – d) zu erkennen:

Punkt a wird beim Aufreißen des Querschnitts erreicht. Das zugehörige Rissmoment ohne Stahlanteil errechnet sich zu:

$$M_{cr} = \left(f_{ctm} - \frac{N}{A_c} \right) \cdot W_c$$

Die zugehörige Krümmung unter Vernachlässigung des Stahls ergibt sich zu: $\kappa = \frac{M_{cr}}{(EI)^I}$

Die Steigung der Geraden zum Punkt a repräsentiert die Biegesteifigkeit EI im Zustand I.

Punkt b kennzeichnet den Beginn des Fließens der Druckbewehrung (-2,174 ‰) was nicht immer vorkommen muss.

Am **Punkt c** nimmt die Krümmung deutlich zu, ohne dass das aufnehmbare Moment ebenfalls stark zunimmt, denn hier beginnt die Zugbewehrung zu fließen (+2,174 ‰). Das zugehörige Moment wird als Fließmoment des Querschnitts bezeichnet.

Die größt mögliche Krümmung des Querschnitts (**Punkt d**) wird erst erreicht, wenn die Betonstauchung maximal wird (-3,5 ‰).

Die Krümmung kann selbstverständlich für einen beliebigen Punkt zw. a und d für eine bestimmte Normalkraft durch Variation der Dehnungsebene ermittelt werden, bis die Summe der H-Kräfte = 0 ist. Das zugehörige Moment ergibt sich dann aus Summe M = 0.

2.1 Einfluss der Normalkraft

Von dem Interaktionsdiagramm für symmetrische Bemessung ist bekannt, dass bei steigender Druckkraft das aufnehmbare Moment des Querschnitts so lange zunimmt, bis die Betongrenzstauchung erreicht ist. Durch Fließen der Zugbewehrung nimmt das aufnehmbare Moment dann wieder ab. **Die Normalkraft, bei der die Betongrenzstauchung erreicht ist und die Zugbewehrung gerade anfängt zu fließen, heißt N_{bal} (balance force). Das ist genau die Normalkraft, bei der der Querschnitt das größte Moment aufnehmen kann.**

Das folgende Bild zeigt diesen Zustand für einen Rechteckquerschnitt mit symmetrischer Bewehrung.

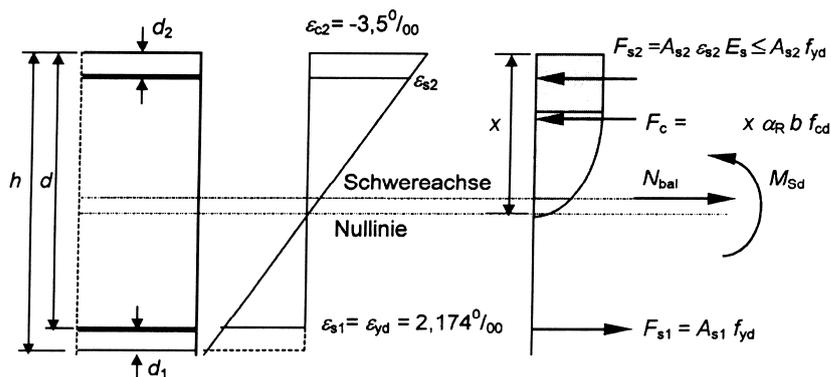


Bild: Dehnungsebene zur Bestimmung von N_{bal}

Aus der Summe aller Horizontalkräfte = 0 folgt:

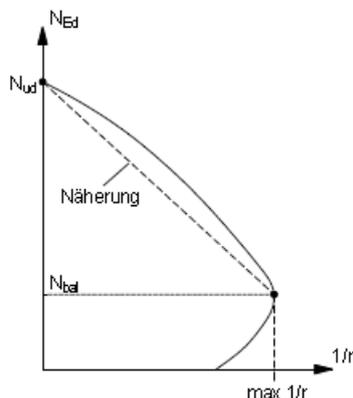
$$-N_{bal} + F_{s1} = F_{s2} + F_c$$

$$-N_{bal} + A_{s1} \cdot f_{yd} = A_{s2} \cdot f_{yd} + \alpha_R \cdot x \cdot b \cdot f_{cd}$$

mit $\dots \alpha_R = 0,81 \dots$ und $\dots x = 0,617 \cdot d \dots$ und $\dots d_1 = d_2 \dots$ und $\dots A_{s1} = A_{s2} \dots$ folgt:

$$N_{bal} = -0,81 \cdot 0,617 \cdot d \cdot b \cdot f_{cd} \approx -0,5 \cdot (1 - d_1 / h) \cdot A_c \cdot f_{cd} \approx -0,4 \cdot A_c \cdot f_{cd}$$

Beim Vergleich von Momenten-Krümmungs-Diagrammen mit gleichem Querschnitt, gleicher Bewehrung und verschieden großen Normalkräften kann man feststellen, dass oberhalb von N_{bal} die Bruchkrümmung stark abnimmt (vgl. Korrekturfaktor K_r im EC 2).



2.2 Einfluss der Bewehrung

Es wurde gezeigt, dass bei konstanter Normalkraft die **Krümmung bei Erreichen der Fließgrenze unabhängig vom Bewehrungsgrad in etwa konstant** ist. Sie kann näherungsweise gemäß dem folgenden Bild mit der Annahme, dass Zug- und

Druckbewehrung gleichzeitig fließen, bestimmt werden zu $\kappa = \frac{2 \cdot \varepsilon_{yd}}{0,9 \cdot d}$

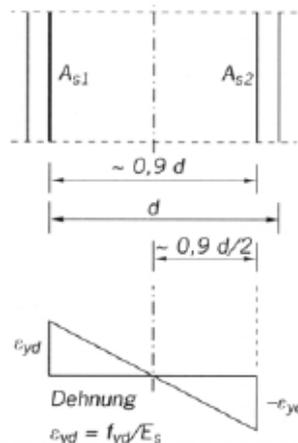


Bild: Näherungsweise Dehnungsebene mit Fließen von Druck- und Zugbewehrung

Um die Erhöhung der Schnittgrößen infolge Verformung zu ermitteln, muss für eine **vorab geschätzte Bewehrung** die Krümmung über das gesamte System integriert werden. Die neuen Schnittgrößen ergeben neue Krümmungen usw., d.h. eine genaue Rechnung kann nur iterativ erfolgen und ist sehr rechenintensiv.

Geht man aber davon aus, dass an jeder Stelle der Stütze gerade so viel Bewehrung liegt, dass diese immer ins Fließen kommt (**gestaffelte Bewehrung**), dann hat man über die gesamte Stützenlänge eine **konstante Krümmung unabhängig vom Bewehrungsgehalt** vorliegen. Mit dieser näherungsweise konstanten Krümmung kommt man dann schnell und ohne Iteration zu einem auf der sicheren Seite liegenden Ergebnis. Diese Vorgehensweise eignet sich hervorragend für eine Handrechnung z.B. für eine Vordimensionierung.

Bei **durchgehender Bewehrung** ist die Krümmung nicht mehr konstant, was durch die Korrekturfaktoren K_r für die Verkrümmung und c für den Krümmungsverlauf in der Norm beim Modellstützenverfahren berücksichtigt wird.

3. Erläuterung am Tragverhalten einer Kragstütze

Die unten dargestellte Kragstütze hat einen konstanten Querschnitt, konstante Bewehrung und bei Vernachlässigung des Eigengewichts eine konstante Normalkraft. Sie erhält zusätzlich zur planmäßigen Ausmitte $e_0 = M_0/N$ eine zusätzliche Ausmitte aus Theorie II. Ordnung $e_2 = M_2/N$, deren Verlauf parabelförmig angenommen werden kann.

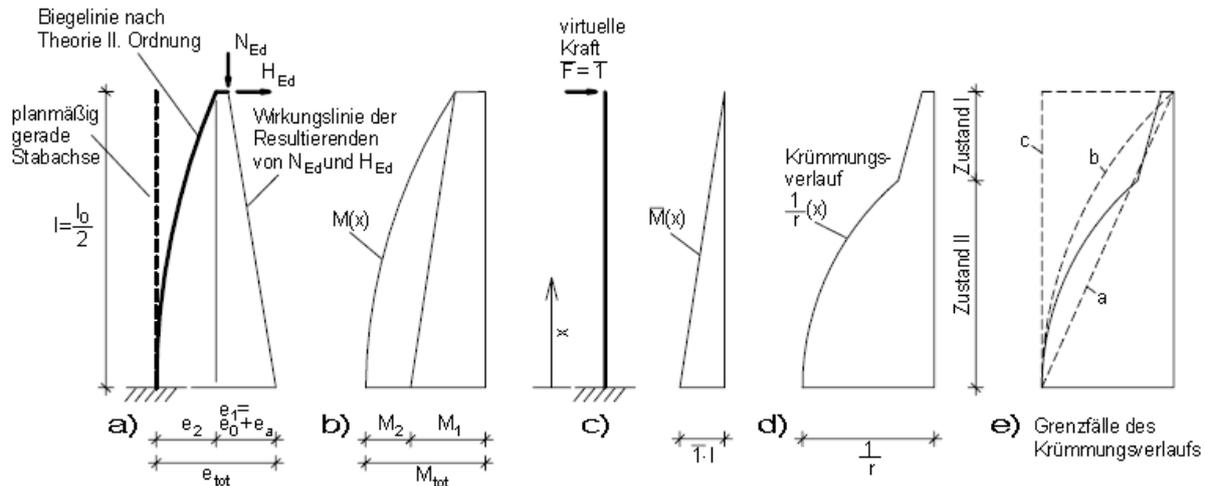


Bild: Kragstütze

Moment nach Theorie I. Ordnung: $M_1 = H \cdot l + M_0$
Zusatzmoment nach Theorie II. Ordnung: $M_2 = N \cdot e_2$

$$e_2 = \int_0^l \frac{M_{tot}}{EI} \cdot \bar{M} \cdot dx = \int_0^l \kappa(x) \cdot \bar{M} \cdot dx$$

Die Gesamtverformung e_2 lässt sich mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte berechnen: e_2 hängt somit vom Krümmungsverlauf ab: Bei kleiner Horizontalkraft H ist er mehr rechteckförmig, bei großem H mehr dreieckförmig, bei großem e_2 nähert er sich einer Parabel an. Dieser Fall ist für den Grenzzustand der Tragfähigkeit maßgebend, weshalb mit einer Parabel weitergerechnet wird. e_2 ergibt sich somit durch koppeln einer Parabel mit einem Dreieck:

$$e_2 = \frac{5}{12} \cdot \kappa(x=0) \cdot l^2$$

Mit der Ersatzlänge (Knicklänge) $l_0 = 2 \cdot l$ ergibt sich:

$$e_2 = \frac{5}{12} \cdot \kappa \cdot \left(\frac{l_0}{2}\right)^2 = \frac{5}{48} \cdot \kappa \cdot l_0^2 \approx 0,1 \cdot \kappa \cdot l_0^2$$

Das Gesamtmoment für die Einspannstelle ergibt sich zu:

$$M_{tot} = M_1 + 0,1 \cdot |N| \cdot \kappa \cdot l_0^2$$

4. Berechnung nach EC 2

4.1 Allgemeines

Eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung ist nur dann zu führen, wenn die durch Verformungen hervorgerufenen Zusatzmomente größer als 10 % der Momente nach Theorie I. Ordnung sind. Dies nachzuweisen erfordert wie gesehen einen hohen Rechenaufwand. Um diesen in den meisten Fällen zu umgehen, werden einfache Entscheidungshilfen eingeführt, die auf einer wichtigen Hilfsgröße, der Schlankheit des Bauteils, aufbauen:

Schlankheit:
$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

Weitere Hilfsgrößen sind der Trägheitsradius
$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$
 Rechteck: $i = \frac{h}{\sqrt{12}}$ Kreis: $i = \frac{h}{4}$

und die Ersatzlänge (Knicklänge)
$$l_0 = \beta \cdot l_{col}$$

Die Ersatzlänge l_0 entspricht dem Abstand zwischen 2 benachbarten Wendepunkten der Biegelinie. l_{col} ist die Stablänge, β ist der Ersatzlängenbeiwert, der bei unverschieblichen Einzelstützen aus den bekannten Eulerfällen zu ermitteln ist (vgl. Bild):

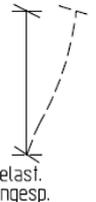
	unverschieblich				verschieblich		
System	gelenkig 	gelenkig 	starr eingesp. 	elast. eingesp. 	frei 	starr eingesp. 	elast. eingesp. 
β (theoretisch)	1,0	0,7	0,5	0,5 bis 1,0	2,0	1,0	1,0 bis ∞
β (realistisch)	1,0	0,76	0,59	0,59 bis 1,0	2,2	1,2	1,2 bis ∞

Bild: Eulerfälle

Der als realistisch angegebene Ersatzlängenbeiwert berücksichtigt, dass eine Einspannung praktisch nicht zu 100 % realisiert werden kann, sondern immer elastisch ist.

Da für den üblichen Hochbau die Biegemomente aus Rahmenwirkung bei Innenstützen von Durchlaufträgern vernachlässigt werden dürfen (= gelenkiger Anschluss der Innenstützen an den Durchlaufträger), sollte in diesem Fall konsequenter Weise mit einem Ersatzlängenbeiwert von $\beta = 1,0$ gerechnet werden.

Von wesentlicher Bedeutung bei Stabilitätsnachweisen ist die Ermittlung der zutreffenden Knicklänge. Es ist offensichtlich, dass die Knicklänge bei verschieblichen Systemen wesentlich größer ist als bei unverschieblichen. Bei mehrgeschoßigen verschieblichen Rahmen ist es schwierig, die Knicklänge zutreffend zu ermitteln, da die Verformungen ohne komplizierte Berechnungen schwer zu erkennen sind (siehe Bild unten).

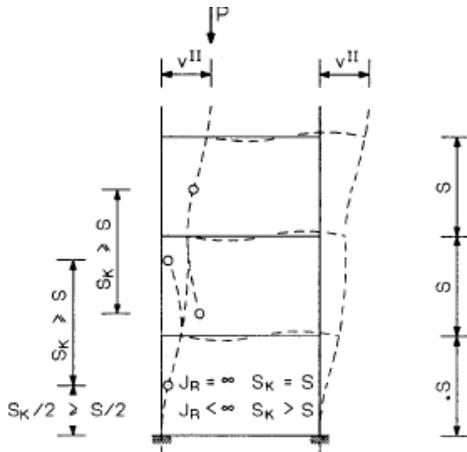


Bild: Knickfigur eines mehrgeschoßigen verschieblichen Stockwerksrahmens.

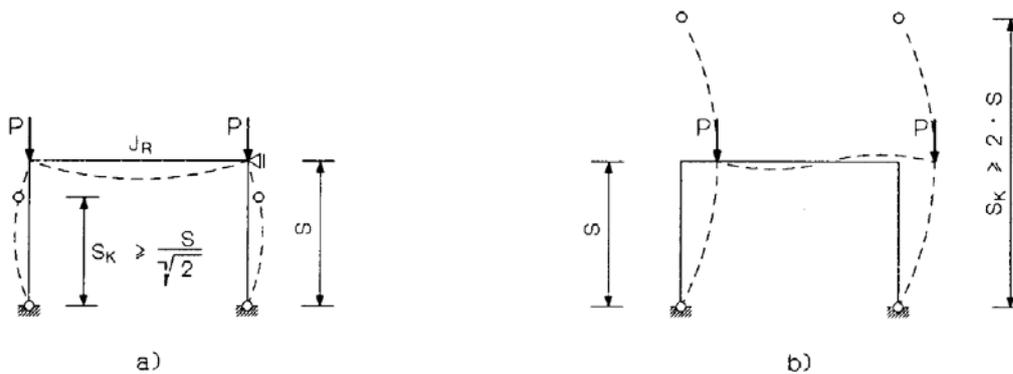


Bild: Gegenüberstellung der Knickfiguren eines verschieblichen und unverschieblichen Rahmens.

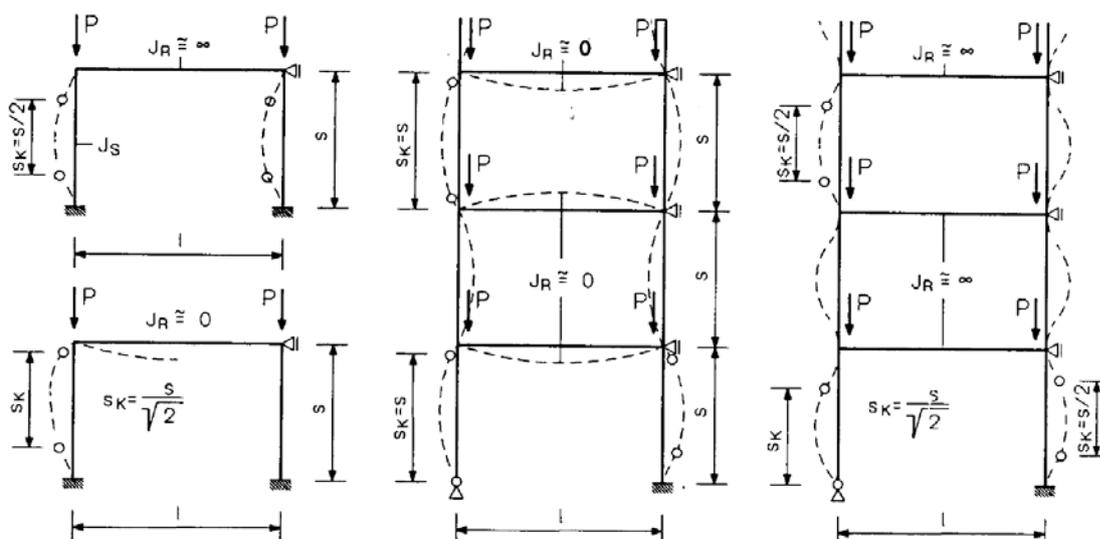


Bild: Gegenüberstellung von Knickfiguren unverschieblicher Rahmen mit steifen und weichen Riegeln.

Ein weiterer häufig vorkommender Fall ist die Einspannung von Stützen (meist Kragstützen von Fertigteilhallen) in ein elastisch gelagertes Fundament. Wie zu erkennen ist, kann sich die Knicklänge bei weichen Böden beträchtlich vergrößern.

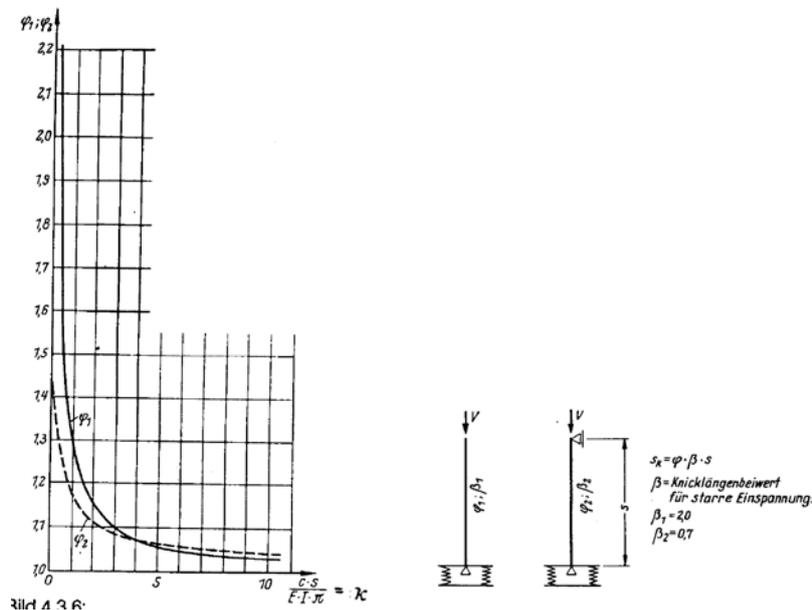


Bild: Knicklängenbeiwerte für elastisch eingespannte Stützen

- s Stützenlänge
- EI Biegesteifigkeit der Stütze
- $c = E_b \cdot I_{fy}$ Drehfederkonstante Fundament = Einspannmoment / Drehwinkel
- $I_{fy} = b_{fx} \cdot b_{fy}^3 / 12$ Trägheitsmoment des Fundaments
- $E_b = 2,5 \cdot E_s / \sqrt{A_f}$ Bettungsmodul, E_s = Steifemodul für Dauerlast
- $A_f = b_{fx} \cdot b_{fy}$ Grundfläche des Fundaments

Auch angehängte Pendelstützen führen zu einer deutlichen Erhöhung der Knicklänge der Stabilisierungsstütze. Der Knicklängenbeiwert β kann dem folgenden Bild entnommen werden:

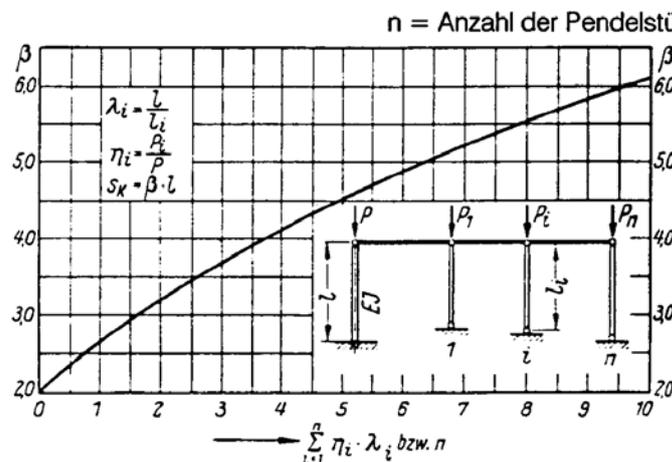


Bild: Knicklängenbeiwert der Stabilisierungsstütze bei angehängten Pendelstützen.

Für Stützen in (regelmäßigen) rahmenartigen Tragwerken mit elastischen Endanspannungen kann die Ersatzlänge über die Knotensteifigkeiten k_1 und k_2 an den Stabenden wie folgt bestimmt werden:

Unverschieblich:
$$l_0 = 0,5 \cdot l_{col} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)} \quad 5.15 \text{ EC2}$$

Verschieblich:
$$l_0 = l_{col} \cdot \max \left\{ \sqrt{\left(1 + 10 \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}\right)}; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right\} \quad 5.16 \text{ EC2}$$

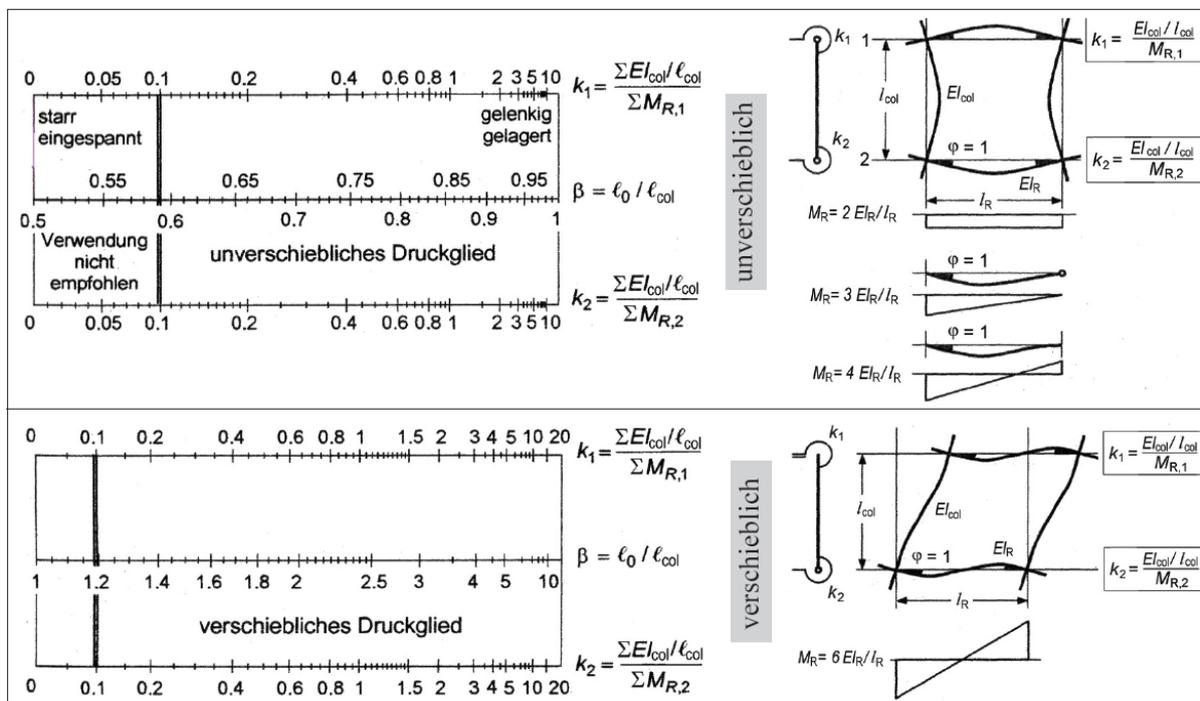
Die Knotensteifigkeiten k_1 und k_2 berechnen sich aus der Summe der am jeweiligen Knoten angeschlossenen Stützensteifigkeiten dividiert durch die Summe der Knotenmomente am jeweiligen Knoten infolge der Einheitsverdrehung $\varphi = 1$:

$$k_i = \frac{\sum E_{cm} \cdot I_{col,i} / l_{col,i}}{\sum M_{R,i}} = \frac{\sum E_{cm} \cdot I_{col,i} / l_{col,i}}{\sum \alpha \cdot E_{cm} \cdot I_{R,i} / l_{R,i}} \quad \alpha = 2,3,4,6 \text{ je nach System}$$

Einer starren Einspannung würde eine Knotensteifigkeit von $k = 0$ entsprechen. Da es aber praktisch keine starre Einspannung gibt (Fundamentverdrehung, Steifigkeitsabfall infolge Rissbildung, usw.), wird empfohlen, $k = 0,1$ nicht zu unterschreiten.

Die Trägheitsmomente der Stützen können nach Zustand I ermittelt werden, die Trägheitsmomente der Riegel sollten wegen Rissbildung (Zustand II) um 50 % vermindert werden.

Die Auswertung der oben genannten Gleichungen ist in dem folgenden Nomogramm zur einfachen Anwendung dargestellt:



4.2 Einteilung der Tragwerke und Bauteile

Tragwerke/Bauteile werden in **ausgesteift** oder **unausgesteift** eingeteilt. Bei ausgesteiften Tragwerken sind oft spezielle **aussteifende Bauteile mit großer Biege- und/oder Schubsteifigkeit vorhanden (z.B. Kerne, Wände)**, die alle Horizontallasten sicher in den Baugrund ableiten. Die Horizontalkräfte sind somit bei der Bemessung der **auszusteifenden Bauteile** nicht mehr zu berücksichtigen.

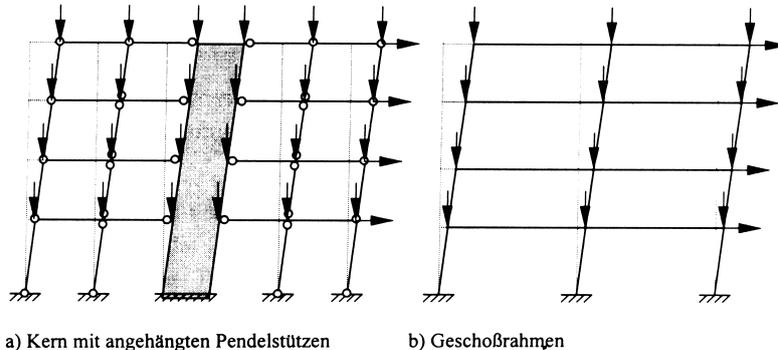


Bild: Tragwerke mit und ohne aussteifende Bauteile

Tragwerke, die unempfindlich gegen Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung reagieren, werden als **unverschieblich** betrachtet. Wenn die Knotenverschiebungen so groß sind, dass sich die Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung um mehr als 10 % erhöhen, dann gilt das Tragwerk als **verschieblich**.

Wenn keine genaueren Nachweise geführt werden, dann gelten **durch Wandscheiben oder Kerne ausgesteifte Tragwerke** als **unverschieblich**, wenn die folgenden einfachen Kriterien erfüllt sind:

a) bei **annähernd symmetrischer Anordnung** der aussteifenden Bauteile:

$$\frac{F_{V,Ed} \cdot L^2}{E_{cd} \cdot I_c} \leq 0,31 \cdot \frac{n_s}{n_s + 1,6} \quad (5.1.1)$$

b) **zusätzlich bei nicht annähernd symmetrischer Anordnung** der aussteifenden Bauteile:

$$\frac{1}{\left[\frac{1}{L} \cdot \sqrt{\sum (F_{V,Ed,j} \cdot r_j^2)} + \frac{1}{2,28} \cdot \sqrt{\sum (F_{V,Ed,j} \cdot r_j^2)} \right]^2} \leq 0,31 \cdot \frac{n_s}{n_s + 1,6} \quad (5.1.2)$$

$E_{cd} = E_{cm} / 1,2$ Bemessungswert des Elastizitätsmoduls von Beton

$G_{cd} = E_{cd} / [2 \cdot (1 + \mu)]$ Bemessungswert des Schubmoduls von Beton, $\mu = 0,2$.

n_s Anzahl der Geschosse

L Gesamthöhe des Tragwerks ab der Einspannung (z.B. im Fundament oder in einem steifen Kellerkasten)

r_j Abstand der Stütze j vom Schubmittelpunkt des Gesamtsystems

$F_{V,Ed}$ Summe aller charakteristischen Vertikallasten

$F_{V,Ed,j}$ Charakteristische Vertikallast des Bauteils j (aussteifend und auszusteifend)

- $E_{cd} \cdot I_c$ Summe der Biegesteifigkeiten aller vertikalen aussteifenden Bauteile in der betrachteten Richtung im Zustand I.
- $E_{cd} \cdot I_\omega$ Summe der Wölbsteifigkeiten aller gegen Verdrehung aussteifenden Bauteile
- $$E_{cd} \cdot I_\omega = \sum E_{cd,i} (I_{y,i} \cdot y_{M,i}^2 + I_{x,i} \cdot x_{M,i}^2 - 2 \cdot I_{xy,i} \cdot x_{M,i} \cdot y_{M,i}) + \sum E_{cd,i} \cdot I_{\omega,i}$$
- $G_{cd} \cdot I_t$ Summe der Torsionssteifigkeiten aller gegen Verdrehung aussteifenden Bauteile (St. Venant'sche Torsionssteifigkeit)

Wenn die aussteifenden Bauteile im **Grenzzustand der Tragfähigkeit ungerissen** sind, dann darf der Faktor 0,31 auf 0,62 verdoppelt werden. Die aussteifenden Bauteile dürfen als nicht gerissen angenommen werden, wenn die Betonzugspannungen den Wert f_{ctm} nicht überschreiten.

4.3 Nachweise am Gesamtsystem

Bei Nachweisen am Gesamtsystem darf die Schiefstellung des gesamten Tragwerks oder äquivalente Ersatzlasten angesetzt werden, um Schnittgrößen aus Imperfektionen zu ermitteln. Hierbei ist die Schiefstellung des Gesamttragwerks $\Theta_i = \Theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$

$\Theta_0 = 1/200$ Grundwert der Schiefstellung

$0 \leq \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{h_{ges}}} \leq 1$ Abminderungsbeiwert für die Höhe h

$\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot (1 + 1/m)}$ Abminderungsbeiwert für die Anzahl der lastabtragenden Bauteile

Hierbei ist m die Anzahl der lotrechten, lastabtragenden, in einem Geschoss nebeneinanderliegenden Bauteile. Als lastabtragend gelten die Bauteile dann, wenn sie mind. 70 % der mittleren Längskraft $N_{Ed,m} = F_{Ed} / m$ aufnehmen, worin F_{Ed} die Summe aller Bemessungswerte der einwirkenden Längskräfte in dem betrachteten Geschöß bezeichnet.

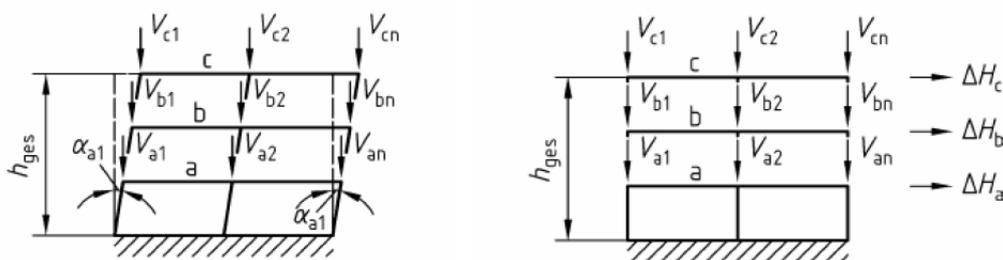


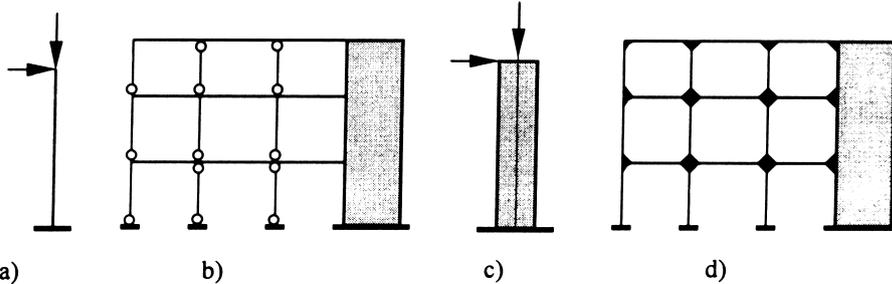
Bild: Schiefstellung eines Rahmens (links) oder horizontale Ersatzlasten (rechts)

Ein Nachweis am Gesamtsystem ist nur noch sinnvoll machbar mit modernen Rechenprogrammen, die die physikalische und geometrische Nichtlinearität berücksichtigen können. Hinweise enthält das Heft 600 vom DAfStb.

4.4 Bemessung von Einzeldruckgliedern

Druckglieder in unverschieblichen Rahmen und Druckglieder als aussteifende Bauteile können nach den **Regeln für Einzeldruckglieder** bemessen werden

Einzeldruckglieder können sowohl einzelne verschiebliche Stützen sein (wie Kragstützen von Fertigteilhallen) oder herausgelöste Teile eines Gesamttragwerkes mit der Ersatzlänge l_0 (vgl. Bild). Diese können sowohl ausgesteifte Bauteile ohne Horizontallasten als auch aussteifende Bauteile mit Horizontallasten sein.



- a) einzelstehende Stütze
 b) gelenkig angeschlossene Druckglieder in einem unverschieblichen Tragwerk
 c) schlankes aussteifendes Bauteil, das als Einzeldruckglied betrachtet wird
 d) biegesteif angeschlossene Druckglieder in einem unverschieblichen Tragwerk

Bild: Arten von Einzeldruckgliedern

4.4.1 Abgrenzungskriterium

Einzeldruckglieder müssen nicht nach Theorie II. Ordnung berechnet werden, wenn ihre Schlankheit relativ klein ist (= geringe Knickgefahr). Dazu müssen sie folgendes Kriterium erfüllen:

$$\lambda_{\text{lim}} = \frac{16}{\sqrt{v_{Ed}}} \text{ für } v_{Ed} < 0,41 \quad \lambda_{\text{lim}} = 25 \text{ für } v_{Ed} \geq 0,41$$

$\lambda = l_0 / i$ Schlankheit des Einzeldruckgliedes im Zustand I
 l_0 Ersatzlänge des Einzeldruckgliedes
 i Flächenträgheitsradius

$v_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{A_c \cdot f_{cd}}$ Bezogene Längskraft des Einzeldruckgliedes

A_c Querschnittsfläche des Druckgliedes

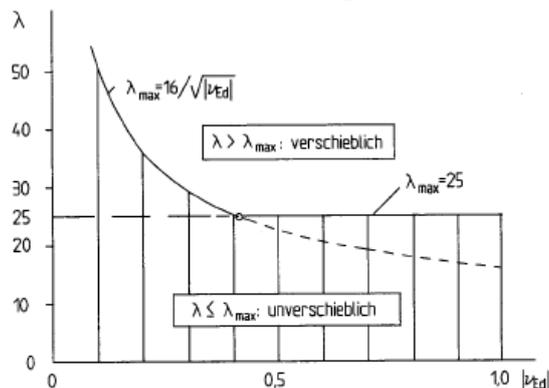


Bild: Schlankheitsgrenze von Einzeldruckgliedern

4.4.2 Verfahren mit einer Nennkrümmung (Modellstützenverfahren)

Das Modellstützenverfahren ist ein **vereinfachtes Verfahren zur Berücksichtigung der Theorie II. Ordnung** und basiert auf Untersuchungen an einer Kragstütze wie oben gezeigt. Die Anwendung des Verfahrens sollte folgendermaßen begrenzt werden:

- Konstanter Stützenquerschnitt mit annähernd symmetrischer Bewehrung
- Einfach gekrümmte Verformungsfigur
- Knicklänge $l_0 \leq 15h$
- Bezogene Exzentrizität $e_0/h \geq 0,1$

Die letzten beiden Beschränkungen sind aus rein wirtschaftlichen Erwägungen gemacht worden, da wie oben gezeigt, der Krümmungsverlauf vereinfacht und auf der sicheren Seite liegend angenommen wurde.

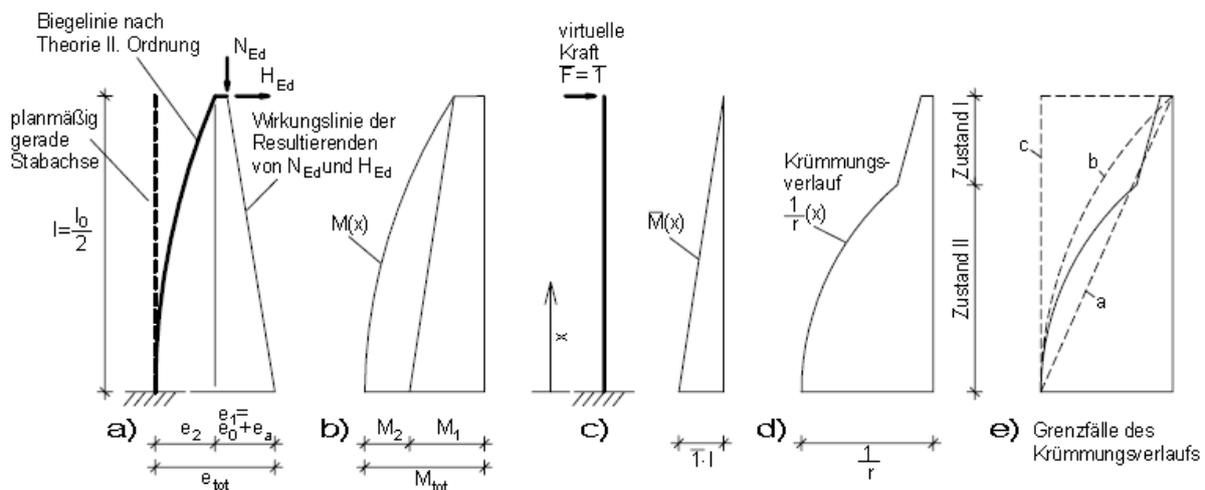


Bild: Kragstütze

Der Nachweis wird geführt durch die Bemessung des kritischen Querschnitts der Modellstütze (=Einspannstelle) mit den Schnittgrößen N_{Ed} ... und ... $M_{Ed} = M_{Ed0} + M_2$

$$M_{Ed0} = |N_{Ed}| \cdot e_1 \quad \text{Moment nach Theorie I. Ordnung incl. Imperfektionen}$$

$$M_2 = |N_{Ed}| \cdot e_2 \quad \text{Moment nach Theorie II. Ordnung}$$

- e_0 planmäßige Ausmitte nach Theorie I. Ordnung, i.A. $e_0 = M_{Ed1}/N_{Ed}$
- e_2 Lastausmitte infolge Theorie II. Ordnung incl. Kriechauswirkungen
Der Verlauf darf sinus- oder parabelförmig angenommen werden.
- e_i Ausmitte infolge Imperfektionen in ungünstigster Richtung

Die Auswirkungen der Imperfektionen können bei **Einzelstützen** auf 2 verschiedene Arten berücksichtigt werden:

1) Ansatz einer Ausmitte: $e_i = \Theta_i \cdot \frac{l_0}{2} \dots \text{mit} \dots \Theta_i = \Theta_0 \cdot \alpha_h \cdot \alpha_m$ im Bogenmaß

$\Theta_0 = 1/200$ Grundwert der Schiefstellung

$0 \leq \alpha_h = \frac{2}{\sqrt{l_{col}}} \leq 1$ Abminderungsbeiwert für die Höhe l_{col}

$\alpha_m = \sqrt{0,5 \cdot (1 + 1/m)}$ Abminderungsbeiwert für die Anzahl der lastabtragenden Bauteile

Bei **ausgesteiften Systemen** ergibt sich mit $\alpha_h = 1$ und $\alpha_m = 1$: $e_i = l_0/400$

Die Bemessungsmomente ergeben sich somit zu:

$$M_{Ed0} = |N_{Ed}| \cdot e_1 \quad \text{mit} \quad e_1 = e_0 + e_i \quad M_2 = |N_{Ed}| \cdot e_2$$

e_0 planmäßige Ausmitte nach Theorie I. Ordnung, i.A. $e_0 = M_{Ed1}/N_{Ed}$

e_2 Lastausmitte infolge Theorie II. Ordnung incl. Kriechauswirkungen
Der Verlauf darf sinus- oder parabelförmig angenommen werden.

e_i Ausmitte infolge Imperfektionen in ungünstigster Richtung

2) Ansatz einer Horizontalkraft H_i in der Position, die das maximale Moment erzeugt:

für nicht ausgesteifte Stützen:

$$H_i = \Theta_i \cdot N$$

für ausgesteifte Stützen:

$$H_i = 2 \cdot \Theta_i \cdot N$$

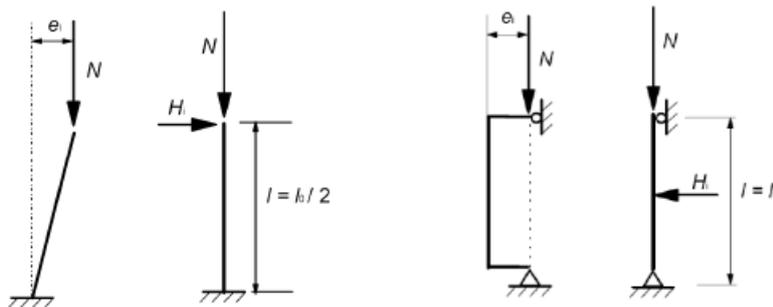


Bild: 5.1 EC2 nicht ausgesteifte

ausgesteifte Einzelstütze

Die Lastausmitte eignet sich für statisch bestimmte Bauteile, wohingegen die Horizontalkraft sowohl für statisch bestimmte als auch für statisch unbestimmte Bauteile verwendet werden kann. Die Kraft H_i darf auch durch eine vergleichbare Quereinwirkung ersetzt werden.

Für Bauteile ohne Querlasten zwischen den Stabenden darf das maßgebende Moment nach Theorie I. Ordnung, das im mittleren Drittel der Knicklänge liegt, vereinfacht wie folgt ermittelt werden:

$$M_{0e} = \max(0,6 \cdot M_{02} + 0,4 \cdot M_{01}, 0,4 \cdot M_{02}) \dots \text{mit} \dots |M_{01}| \leq |M_{02}|$$

$M_{01} = |N_{Ed}| \cdot e_{01}$ $M_{02} = |N_{Ed}| \cdot e_{02}$ Momente infolge der Längskraft N_{Ed} nach Theorie I. Ordnung an den Stützenenden mit Vorzeichen.

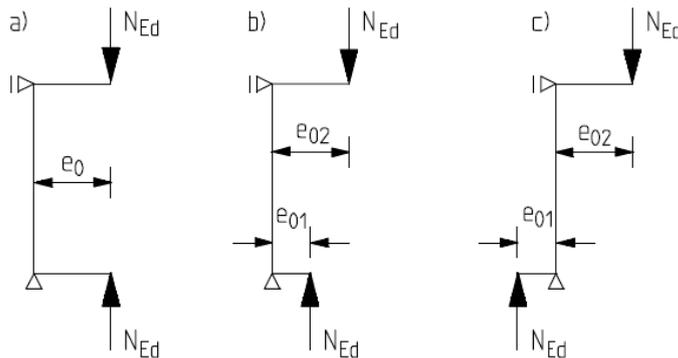
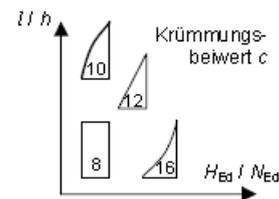


Bild: Lastausmitten (a konstant b+c veränderlich)

Berechnung des Momentes nach Theorie II. Ordnung

$$M_2 = |N_{Ed}| \cdot e_2$$

Ausmitte aus Theorie II. Ordnung:
$$e_2 = K_1 \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{l_0^2}{c}$$



c Beiwert zur Berücksichtigung des Krümmungsverlaufs
Bei konstantem Querschnitt wird üblicherweise $c = 10$ verwendet. Wenn das Moment nach Theorie I. Ordnung konstant ist, ist in der Regel ein niedrigerer Wert anzusetzen (8 ist ein unterer Grenzwert, der einem konstanten Verlauf des Gesamtmoments entspricht).

$1/r$ Krümmung

K_1 **EC2:** $K_1 = 1$

NA: Korrekturfaktor zur Sicherstellung eines allmählichen Übergangs vom GZT für Biegung und Längskraft ($\lambda \leq 25$) zum Knicken ($\lambda > 25$).

$$K_1 = \lambda / 10 - 2,5 \dots \text{für} \dots 25 \leq \lambda \leq 35 \quad K_1 = 1 \dots \text{für} \dots \lambda > 35$$

Krümmung:

$$\frac{1}{r} = K_\varphi \cdot K_r \cdot \frac{1}{r_0}$$

(vgl. Herleitung oben)

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45 \cdot d}$$

Krümmung beim Fließen von Zug- und Druckbewehrung.

$$\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s$$

Fliessdehnung

$$K_r = \frac{n_u - n}{n_u - n_{bal}} \leq 1$$

Faktor zur Anpassung des Krümmungsverlaufs (s. Bild unten).

$$n = \frac{N_{Ed}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

bezogene Normalkraft.

$$n_u = 1 + \omega = 1 + \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}}$$

max. aufnehmbare bezogene Normalkraft ohne Biegung.

$$n_{bal} = 0,4$$

max. aufnehmbare bezogene Normalkraft bei max. Biegung.

K_φ

Erhöhungsfaktor zur Berücksichtigung des Kriechens

Wenn die gesamte Bewehrung nicht an den gegenüberliegenden Querschnittsseiten konzentriert, sondern teilweise parallel zur Biegungsebene verteilt ist, dann wird die statische Höhe d korrigiert: $d = h/2 + i_s$ $i_s = \sqrt{I_s / A_s}$ Trägheitsradius der ges. Bewehrungsfläche.

Der Faktor K_r berücksichtigt die Krümmungsabnahme bei zunehmender Normalkraft. Im folgenden Bild kann man erkennen, dass es sich hierbei vereinfacht um eine Gerade handelt, die den tatsächlichen Verlauf gut annähert.

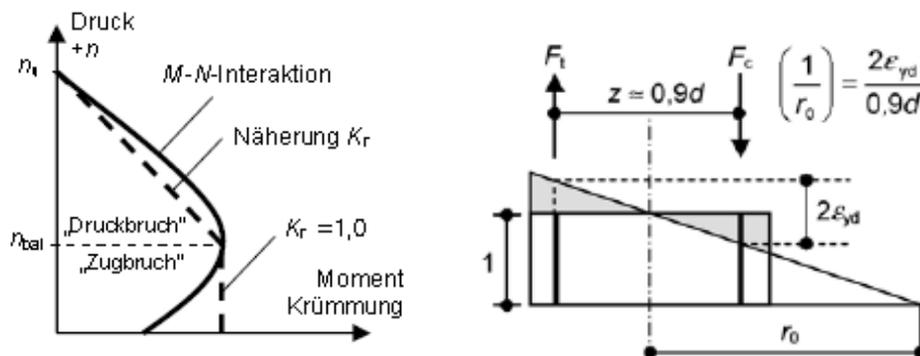


Bild: Beziehung zw. Längskraft und Krümmung

Wie man sieht, hängt K_r von der Bewehrung ab, d.h. man muss die Bewehrung iterativ durch schätzen von K_r ermitteln. Mit der Wahl von $K_r = 1$ liegt man auf der sicheren Seite.

Berücksichtigung von Kriechen

Mit Kriechen bezeichnet man die lastabhängige Verformung des Betons (insbes. des Zementsteins) über einen längeren Zeitraum. Wenn die Lastausmitte klein ist, muss Kriechen nicht berücksichtigt werden, da nur kleine Verkrümmungen des Querschnitts und somit auch kaum ein Schnittgrößenzuwachs entsteht.

Wenn Kriechauswirkungen nicht vernachlässigt werden dürfen, darf dies vereinfacht durch die effektive Kriechzahl φ_{ef} berücksichtigt werden: $\varphi_{ef} = \varphi(\infty, t_0) \cdot M_{0Eqp} / M_{0Ed}$

$\varphi(\infty, t_0)$ Endkriechzahl nach EC 2

M_{0Eqp} Biegemoment nach Theorie I. Ordnung unter quasi-ständigen Lasten (GZG) incl. Imperfektionen.

M_{0Ed} Biegemoment nach Theorie I. Ordnung unter Bemessungslasten (GZT) incl. Imperfektionen.

Mit dieser effektiven Kriechzahl erfolgt eine Vergrößerung der Verkrümmung über den Faktor

$$K_\varphi = 1 + \beta \cdot \varphi_{ef} \geq 1 \quad \text{mit} \quad \beta = 0,35 + f_{ck}/200 - \lambda/150 \geq 0$$

λ Schlankheit des Druckglieds

Kriechen darf vernachlässigt werden, wenn gilt: $\varphi(\infty, t_0) \leq 2 \quad \lambda \leq 75 \quad M_{0Ed} / N_{Ed} \geq h$

NA: Kriechauswirkungen dürfen i.d.R. auch vernachlässigt werden, wenn die Stütze an beiden Enden monolithisch mit lastabtragenden Bauteilen verbunden ist **oder** bei verschieblichen Tragwerken die **Schlankheit < 50 und gleichzeitig die bezogene Lastausmitte $e_0/h > 2$** ($M_{0Ed} / N_{Ed} > 2h$) ist.

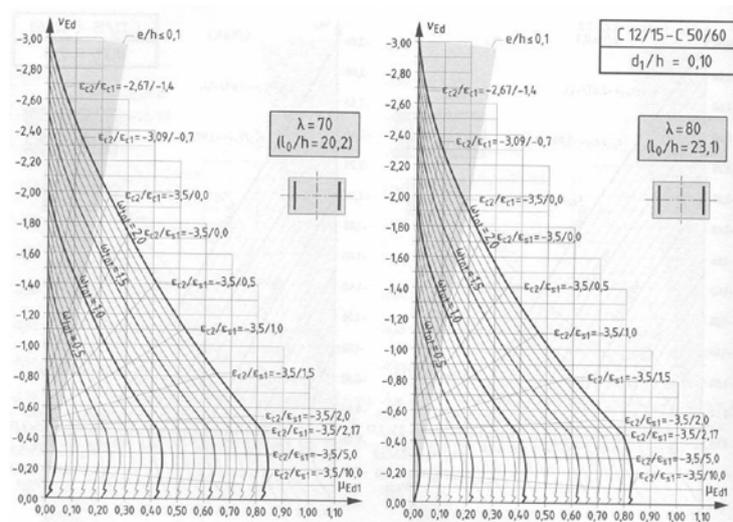
Wird bei verschieblichen Tragwerken eine Einspannung der Stabenden des Druckglieds durch anschließende Bauteile angenommen (z.B. durch Rahmenriegel), dann sind diese Bauteile auch für diese Zusatzbeanspruchung zu bemessen!

4.4.3 Bemessungshilfen

μ -Nomogramme

Die μ -Nomogramme enthalten die exakte Lösung des Modellstützenverfahrens unter Berücksichtigung der Ausmitte e_2 . Die Diagramme sind anhand des Querschnitts (Rechteck, Kreis), der Bewehrungslage (symmetrisch, umlaufend), der Schlankheit λ und dem Verhältnis d_1/h auszuwählen. Als Eingangsparameter benötigt man dann

- das bezogene Moment $\mu_{Ed} = \frac{M_{Ed1}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}}$ mit $M_{Ed1} = N_{Ed} \cdot (e_0 + e_a + e_c)$
- die bezogene Längskraft $\nu_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{b \cdot h \cdot f_{cd}}$



e/h -Diagramme

Der Eingangsparameter e_1/h ersetzt hier das bezogene Moment μ_{Ed} , wobei wie beim μ -Nomogramm $e_1 = e_0 + e_a + e_c$ ist.

Die Diagramme sind in den bekannten Tabellenwerken [2] [3] [7] zu finden und je nach Querschnittstyp, Bewehrungsanordnung und Verhältnis d_1/h auszuwählen.

4.4.4 Nachweis bei 2-achsiger Knickgefahr

Für Druckglieder, die nach beiden Hauptachsenrichtungen knicken können, ist im Allgemeinen ein Nachweis auf schiefe Biegung mit Längsdruckkraft zu führen. Alternativ dürfen auch Näherungsverfahren verwendet werden, wenn die folgenden Regelungen eingehalten werden.

Als erster Schritt darf eine getrennte Bemessung in beiden Hauptachsenrichtungen ohne Beachtung der zweiachsigen Lastausmitte erfolgen. Imperfektionen müssen nur in der Richtung berücksichtigt werden, in der sie zu den ungünstigsten Auswirkungen führen.

Die getrennten Nachweise dürfen dabei in den Richtungen der beiden Hauptachsen jeweils mit der gesamten im Querschnitt angeordneten Bewehrung durchgeführt werden.

Es bedarf keiner weiteren Nachweise, wenn die folgenden 2 Bedingungen eingehalten sind:

- 1) $\lambda_y / \lambda_z \leq 2$ und $\lambda_z / \lambda_y \leq 2$ (5.38a EC2) $\lambda_y = l_0 / i_y$ $\lambda_z = l_0 / i_z$
- 2) $\frac{e_y / h_{eq}}{e_z / b_{eq}} \leq 0,2$ oder $\frac{e_z / b_{eq}}{e_y / h_{eq}} \leq 0,2$ (5.38b EC2) $e_y = M_{Edz} / N_{Ed}$ $e_z = M_{Edy} / N_{Ed}$

$M_{Edz/y}$ das Bemessungsmoment um die z/y-Achse, einschließlich des Moments nach Theorie II. Ordnung. (**NA**: Theorie I. Ordnung ausreichend)

N_{Ed} der Bemessungswert der Normalkraft in der zugehörigen Einwirkungskombination.

$b_{eq} = i_y \cdot \sqrt{12}$ Breite eines gleichwertigen Rechteckquerschnitts

$h_{eq} = i_z \cdot \sqrt{12}$ Höhe eines gleichwertigen Rechteckquerschnitts

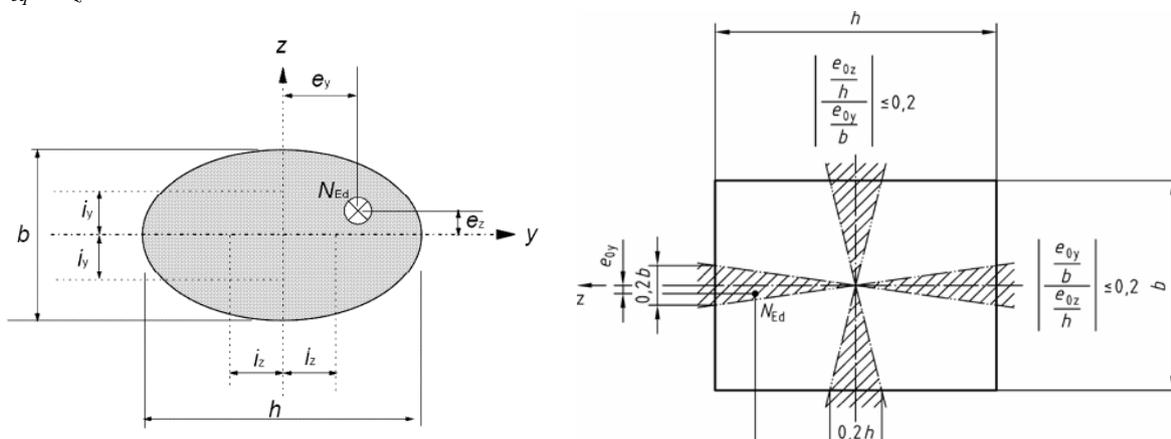


Bild 5.8 EC2: Definition der Lastausmitten e_y und e_z Lage von N_{Ed} beim Rechteckquerschnitt

Werden die Bedingungen der Gleichung (5.38) nicht erfüllt, ist in der Regel eine zweiachsige Lastausmitte einschließlich der Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung in beiden Richtungen zu berücksichtigen. Ohne eine genaue Bemessung der Querschnitte für eine zweiachsige Lastausmitte darf der folgende vereinfachte Nachweis verwendet werden:

$$\left(\frac{M_{Edz}}{M_{Rdz}} \right)^a + \left(\frac{M_{Edy}}{M_{Rdy}} \right)^a \leq 1,0 \quad (5.39 \text{ EC2})$$

für runde und elliptische Querschnitte: $a = 2$
für rechteckige Querschnitte gemäß Tabelle.

$$N_{Rd} = A_{c,brutto} \cdot f_{cd} + A_s \cdot f_{yd}$$

N_{Ed} / N_{Rd}	0,1	0,7	1,0
$a =$	1,0	1,5	2,0

NA: Zusätzliche Bedingung für Rechteckquerschnitte

Für Druckglieder mit **rechteckigem Querschnitt und mit $e_{0z} > 0,2h$** dürfen getrennte Nachweise nur dann geführt werden, wenn der Nachweis der Biegung über die schwächere Hauptachse z des Querschnitts auf der Grundlage der reduzierten Querschnittsdicke h_{red} nach Bild NA.5.8.1 geführt wird. Der Wert h_{red} darf unter der Annahme einer linearen Spannungsverteilung nach folgender Gleichung ermittelt werden:

$$h_{red} = \frac{h}{2} \cdot \left(1 + \frac{h}{6 \cdot (e_{0z} + e_{iz})} \right) \leq h \quad (\text{NA 5.38.1})$$

- h die größere der beiden Querschnittsseiten.
- e_{iz} die Zusatzausmitte aus Imperfektionen in z-Richtung.
- e_{0z} die Lastausmitte nach Theorie I . Ordnung in Richtung der Querschnittsseite h.

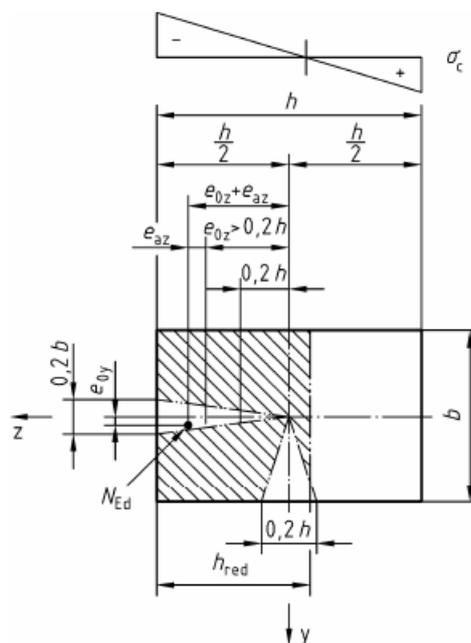


Bild NA.5.8.1: Reduzierte Querschnittsdicke h_{red}

5. Konstruktion von Druckgliedern

Die Konstruktion von Druckgliedern wird im Script „Stützen“ behandelt.

6. Seitliches Ausweichen schlanker Träger

Das seitliche Ausweichen schlanker Träger muss in bestimmten Fällen berücksichtigt werden, beispielsweise bei Transport und Montage von Fertigteilträgern, bei Trägern ohne ausreichende seitliche Aussteifung im fertigen Tragwerk usw. Geometrische Imperfektionen sind dabei anzusetzen.

Beim Nachweis von nicht ausgesteiften Trägern ist in der Regel eine seitliche Auslenkung von $l/300$ als geometrische Imperfektion anzusetzen, wobei l die Gesamtlänge des Trägers ist. Im fertigen Tragwerk darf die Aussteifung durch angeschlossene Bauteile berücksichtigt werden.

Die Auswirkungen nach Theorie II. Ordnung auf das seitliche Ausweichen dürfen vernachlässigt werden, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

Ständige Bemessungssituation:

$$\frac{l_{0r}}{b} \leq \frac{50}{\sqrt[3]{\left(\frac{h}{b}\right)}} \quad \text{bzw.} \quad b \geq \sqrt[4]{\left(\frac{l_{0r}}{50}\right)^3 \cdot h} \quad \text{und} \quad h/b \leq 2,5$$

Vorübergehende Bemessungssituation:

$$\frac{l_{0r}}{b} \leq \frac{70}{\sqrt[3]{\left(\frac{h}{b}\right)}} \quad \text{bzw.} \quad b \geq \sqrt[4]{\left(\frac{l_{0r}}{70}\right)^3 \cdot h} \quad \text{und} \quad h/b \leq 3,5$$

- l_{0r} Länge des Druckgurts zwischen seitlichen Abstützungen
- h Gesamthöhe des Trägers im mittleren Bereich von l_{0r}
- b Breite des Druckgurts

Die durch das seitliche Ausweichen entstehende Torsion muss bei der Bemessung des unterstützenden Tragwerks berücksichtigt werden.

NA: Sofern keine genaueren Angaben vorliegen, ist die Auflagerkonstruktion so zu bemessen, dass sie mindestens ein Torsionsmoment $T_{Ed} = V_{Ed} \cdot l_{eff} / 300$ aus dem Träger aufnehmen kann. Dabei ist l_{eff} die effektive Stützweite des Trägers und V_{Ed} der Bemessungswert der Auflagerkraft rechtwinklig zur Trägerachse.

7. Literatur

- [1] DIN EN 1992-1-1 Eurocode 2, Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Beuth Verlag GmbH, 10772 Berlin, Januar 2011
- [2] DIN EN 1992-1-1/NA Eurocode 2, Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau, Beuth Verlag GmbH, 10772 Berlin, Juli 2012
- [3] Eurocode 2 für Deutschland, Kommentierte Fassung, Ernst&Sohn, Berlin, Dezember 2011
- [4] Schneider Bautabellen für Ingenieure, neueste Auflage.
- [5] Heft 600 DAFStb, Beuth-Verlag, Berlin, August 2012
- [6] Kordina, Quast: Bemessung von schlanken Bauteilen für den durch Tragwerksverformungen beeinflussten Grenzzustand der Tragfähigkeit – Stabilitätsnachweis. Betonkalender 1996.
- [7] Quast: Stützenbemessung, Heft 425 DAFStb 1992.
- [8] Schmitz/Goris: Bemessungstabellen nach DIN 1045-1, Werner-Verlag