

Spannungen

1 Grundlagen

1.1 Allgemeines

Die Begrenzung von Spannungen im GZG wird primär für statisch unbestimmt gelagerte Bauteile, bei denen die Schnittgrößenermittlung im Grenzzustand der Tragfähigkeit unter Ausnutzung plastischer Systemreserven erfolgt ist, und für vorgespannte Bauteile maßgebend. Die Spannungsbegrenzungen umfassen echte Nachweise der Gebrauchstauglichkeit und implizite Nachweise der Dauerhaftigkeit, die u. a. auf die Beschränkung des Auftretens bzw. der Breite von Rissen abzielen.

Die Spannungsgrenzen müssen, mit Ausnahme der Spannstahlspannung, zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein. Auswirkungen zeitabhängigen Verhaltens (Kriechen und Schwinden) sind daher, sofern sie spannungserhöhend wirken, zu berücksichtigen.

1.2 Regelungen nach EC 2

Im EC 2 werden Spannungsgrenzwerte für folgende Situationen angegeben:

- Beton (Druck) unter seltenen und quasi-ständigen Einwirkungen
- Betonstahl unter seltenen Einwirkungen
- Spannstahl unter seltenen und quasiständigen Einwirkungen

Im Normalfall werden bei nicht vorgespannten, statisch bestimmten Systemen die Spannungsnachweise i.Allg. bereits durch die Bemessung im GZT erfüllt. Bei statisch unbestimmten Systemen können im Rahmen der Schnittgrößenermittlung für Nachweise im GZT die plastischen Systemreserven durch Momentenumlagerungen bzw. nichtlineare oder plastische Verfahren weitgehend ausgeschöpft werden. Damit kann nicht mehr ohne weiteres davon ausgegangen werden, dass die Beanspruchungen eines Querschnitts im Gebrauchszustand auf ein unschädliches Maß begrenzt werden. Bei Ausnutzung der erweiterten Bemessungsmöglichkeiten statisch unbestimmter Tragwerke muss dies daher explizit nachgewiesen werden.

Da in vielen Fällen die Spannungsnachweise implizit erfüllt sind, dürfen nach EC 2 die Spannungsnachweise für Beton und Betonstahl entfallen, wenn die folgenden Bedingungen eingehalten werden:

- Es handelt sich um nicht vorgespannte Bauteile des üblichen Hochbaus.
- Die Schnittgrößen werden auf Grundlage der Elastizitätstheorie ermittelt und im GZT um nicht mehr als 15% umgelagert.
- Die konstruktiven Regeln und insbesondere die Regelungen zur Mindestbewehrung nach den jeweiligen Abschnitten des EC 2 werden eingehalten.

Hinweis: Maßgebender Grenzzustand bei statisch unbestimmten Systemen

Bei statisch unbestimmten Systemen kann mit der Nutzung von Fließgelenkmechanismen in hochbeanspruchten Querschnitten eine Umverteilung der Bemessungsmomente erreicht werden. Dadurch nähert sich das Bemessungsmoment M_{Ed} im GZT den ohne Umlagerung zu berechnenden Bemessungsmomenten $M_{Ed,rare}$ bzw. $M_{Ed,perm}$ aus dem GZG an. Die Annäherung der Bemessungsmomente im GZT und GZG hat zur Folge, dass die Spannungsnachweise des Gebrauchszustandes, insbesondere die der Betondruckspannungen, entscheidend für die Querschnittsabmessungen werden können.

1.2.1 Begrenzung der Betondruckspannungen

Bei dauerhaft einwirkenden Betondruckspannungen $\sigma_c > 0,4 f_{cm}$ treten im Betongefüge vermehrt Mikrorisse auf, die zu einem überproportionalen Anstieg der Kriechverformungen, d. h. zu nichtlinearem Kriechen führen. Um dies zu vermeiden, müssen die Betondruckspannungen unter **quasi-ständiger Belastung** wie folgt begrenzt werden:

$$\sigma_{c,perm} \leq 0,45 f_{ck}$$

Dieser Nachweis ist **ohne Berücksichtigung zeitabhängiger Änderungen** zu führen, da sich die Betondruckspannungen durch Kriechen über die Zeit abbauen.

Für Bauteile, bei denen mit **Chlorideinwirkung oder Frostangriff** (Expositionsklassen XD, XS und XF) zu rechnen ist, sind die Betondruckspannungen für die **seltene Belastung** wie folgt zu begrenzen:

$$\sigma_{c,rare} \leq 0,60 f_{ck}$$

Der Grenzwert $0,6 f_{ck}$ bezeichnet die Betondruckspannung, ab der Mikrorissbildung durch Querkzugspannungen auftreten kann. Da diese Risse u.U. Druckbewehrungsstäbe erreichen können, besteht unter den entsprechenden Umweltbedingungen ein erhöhtes Korrosionsrisiko.

Diese Grenze kann entfallen, wenn durch Umschnürung der Druckzone, d. h. durch die Erzeugung eines mehrachsialen Spannungszustandes, die rissauslösende Druckspannung angehoben wird. Anhaltswerte für eine ausreichende Umbügelung sind z. B. im EC 2 zu finden.

Es sei erwähnt, dass die Annahme elastischen Betonverhaltens für $\sigma_c = 0,60 f_{ck}$ zwar nicht mehr zutrifft, allerdings für die rechnerische Betondruckspannung angesichts der zu hoch angenommenen Steifigkeit auf der sicheren Seite liegt.

1.2.2 Begrenzung der Betonstahlspannungen

Wenn die Streckgrenze der Bewehrung überschritten wird, können durch die plastischen, nicht reversiblen Stahldehnungen ständig offene, klaffende Risse entstehen, die die Dauerhaftigkeit erheblich einschränken. Da dies bereits bei einmaligem Erreichen des Fließbereichs eintreten kann, muss der Nachweis für die **seltene Einwirkungskombination** erfüllt werden.

Für **direkte Einwirkungen (Last)** ist $\sigma_s < 0,8 f_{yk}$ als Grenzwert festgelegt; mit der Differenz zu f_{yk} werden Auswirkungen nicht explizit berücksichtigter Zwangbeanspruchungen sowie zeitabhängiger Kraftumlagerungen auf die Stahlspannungen erfasst. Dem entsprechend kann der Nachweis i. Allg. für t_0 geführt werden.

Sofern die Stahlspannungen ausschließlich durch **indirekte Einwirkungen (Zwang)** hervorgerufen werden, darf der Grenzwert auf **1,0 f_{yk}** angehoben werden.

2 Grundlagen für die Berechnung

Die Ermittlung von Spannungen wird grundsätzlich getrennt für den ungerissenen Zustand (Zustand I) und den gerissenen Zustand (Zustand II) durchgeführt. Für den Zustand I kann die Spannungsermittlung auf der Grundlage der Technischen Biegelehre erfolgen. Im Zustand II erfolgt die Spannungsermittlung im allgemeinen Fall über eine Variation der Dehnungsebene, bis die inneren Kräfte mit den äußeren Kräften im Gleichgewicht sind (vgl. Biegebemessung).

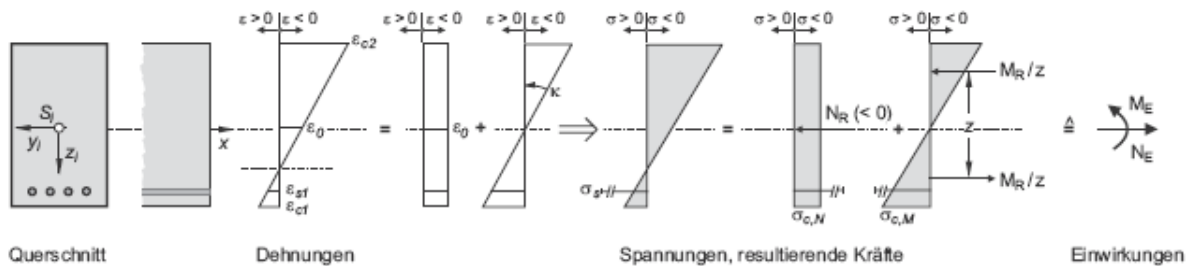


Bild: Dehnungen und Spannungen im ungerissenen Zustand

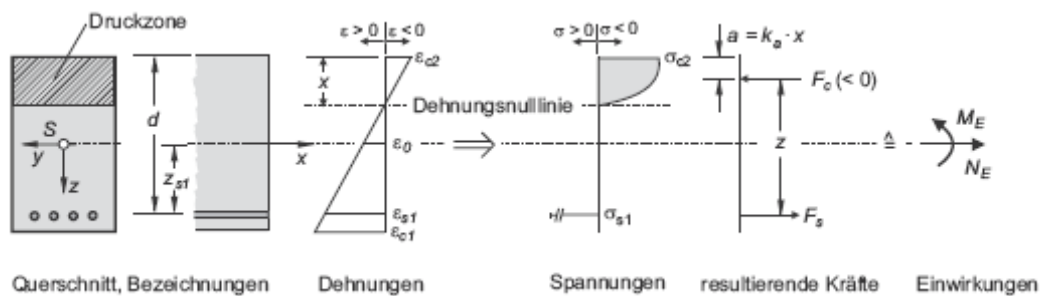


Bild: Dehnungen und Spannungen im gerissenen Zustand

Da bei bekannten Spannungen auch gleichzeitig die Dehnungen bekannt sind (Materialgesetz), kann über die Querschnittsverkrümmung direkt die vorhandene Biegesteifigkeit ermittelt werden:

aus der Statik:
$$\kappa = \frac{M_y}{E_c I_y}$$

aus der Geometrie:
$$\kappa = \frac{\varepsilon_{c1} - \varepsilon_{c2}}{h} = \frac{-\varepsilon_{c2}}{x} = \frac{\varepsilon_{s1} - \varepsilon_{c2}}{d}$$

Da die Biegesteifigkeit (und damit auch die Krümmung) die maßgebende Größe für die Berechnung von Verformungen ist, sind die hier vorgestellten Rechengrundlagen auch für die Ermittlung von Verformungen zu benutzen.

2.1 Querschnittswerte und Spannungen im Zustand I

Im Stahlbetonbau und insbesondere im Spannbetonbau werden 3 Arten von Querschnittswerten unterschieden:

Bruttoquerschnittswerte A_c

Es handelt sich hierbei um einen homogenen Betonquerschnitt mit den realen Abmessungen ohne Berücksichtigung von Beton- oder Spannstahl. Im Stahlbetonbau sind Bruttoquerschnittswerte generell ausreichend genau für die Schnittgrößenermittlung und die Bemessung.

Nettoquerschnittswerte A_n

Nettoquerschnittswerte beschreiben den reinen Betonquerschnitt abzüglich der Bewehrungsstränge. Sie werden u.a. bei Betrachtungen zu Kriechen, Schwinden und Vorspannung genutzt.

Ideelle Querschnittswerte A_i

Ideelle Querschnittswerte repräsentieren den realen Verbundquerschnitt, d.h. es muss voller Verbund zwischen Betonstahl/Spannstahl und Beton vorliegen. Zur mechanisch korrekten Berücksichtigung der Bewehrung wird als Bezugswert der E-Modul des Betons festgelegt

und die Bewehrung mit dem Faktor α gewichtet: $\alpha_s = \frac{E_s}{E_c} \dots \alpha_p = \frac{E_p}{E_c}$

Die Eigenträgheitsmomente der Bewehrungslagen sind in der Regel sehr klein und können vernachlässigt werden.

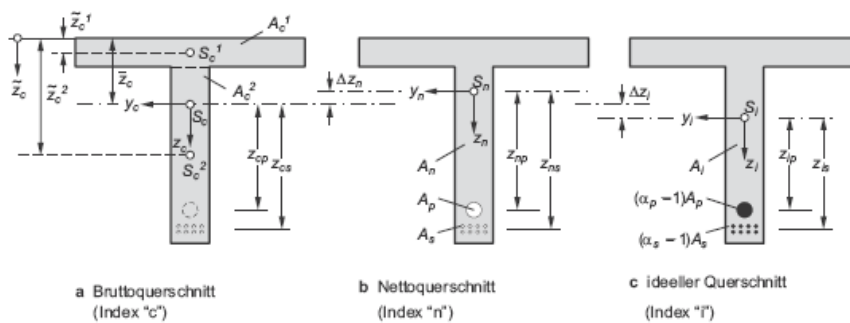


Bild: Vergleich

Für reine Stahlbetonbauteile gilt z.B. folgendes:

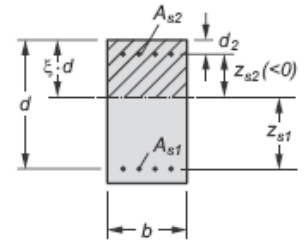
Querschnittsflächen: $A_n = A_c - \sum_j A_{s,j}$ $A_i = A_c + (\alpha_s - 1) \cdot A_s$

Spannungen im Zustand I: $\sigma_c = \frac{N}{A_i} + \frac{M}{I_i} \cdot z$ $\sigma_s = \alpha_s \cdot \sigma_c$

Biegesteifigkeit im Zustand I: $EI^I = E_c I_i$

Für den Sonderfall der **reinen Biegebeanspruchung** ($N_{Ed} = 0$) liegt der mechanische Schwerpunkt des gerissenen Querschnitts in der Dehnungsnulllinie. Die Druckzonenhöhe x ist dann unabhängig von der Beanspruchung, wie man aus dem jetzt quadratischen Polynom

erkennen kann:
$$\xi^2 + 2 \cdot \alpha_s \cdot \rho_l \cdot \xi - 2 \cdot \alpha_s \cdot \left(\rho_{s1} + \rho_{s2} \cdot \frac{d_2}{d} \right) = 0$$



Für eine **rechteckige Betondruckzone** ergibt sich die folgende Lösung:

Bez. Druckzonenhöhe:
$$\xi = -\alpha_s \cdot \rho_l + \sqrt{\alpha_s^2 \cdot \rho_l^2 + 2 \cdot \alpha_s \cdot \left(\rho_{s1} + \rho_{s2} \cdot \frac{d_2}{d} \right)}$$

Betonrandspannung:
$$\sigma_{c2} = - \frac{M_{Ed}}{b \cdot d^2 \cdot \left[\frac{\xi}{2} \cdot \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) + \alpha_s \cdot \rho_{s2} \cdot \left(1 - \frac{d_2}{d} \right) \cdot \left(1 - \frac{d_2}{d} \cdot \frac{1}{\xi} \right) \right]}$$

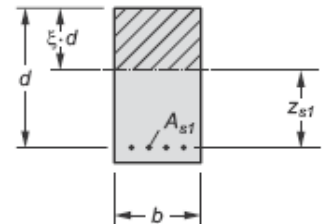
Stahlspannung:
$$\sigma_{s1} = -\sigma_{c2} \cdot \alpha_s \cdot \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right)$$

Bei **Entfall der Druckbewehrung** vereinfacht sich die Lösung zu:

Bezogene Druckzonenhöhe:
$$\xi = -\alpha_s \cdot \rho_{s1} + \sqrt{\alpha_s^2 \cdot \rho_{s1}^2 + 2 \cdot \alpha_s \cdot \rho_{s1}}$$

Betonrandspannung:
$$\sigma_{c2} = - \frac{M_{Ed}}{b \cdot d^2 \cdot \left[\frac{\xi}{2} \cdot \left(1 - \frac{\xi}{3} \right) \right]}$$

Stahlspannung:
$$\sigma_{s1} = -\sigma_{c2} \cdot \alpha_s \cdot \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right)$$



Querschnittswerte im reinen Zustand II

Die Querschnittswerte gerissener Querschnitte werden nach den bekannten Regeln der Technischen Mechanik ermittelt, indem nur der Restquerschnitt (= Druckzone) und die Stahleinlagen angesetzt werden, wobei die Eigenträgheitsmomente der Stahleinlagen vernachlässigbar klein sind.

Lösung Rechteckquerschnitt:
$$I_{II} = \frac{b \cdot d^3}{12} \cdot \left(4 \cdot \xi^3 + 12 \cdot \alpha_s \cdot \rho_{s1} \cdot \left((1 - \xi)^2 + \frac{\rho_{s2}}{\rho_{s1}} \cdot \left(\xi - \frac{d_2}{d} \right)^2 \right) \right)$$

Beispiel: Einfach bewehrter Querschnitt mit rechteckiger Betondruckzone ohne Normalkraft (Dehnungsnulllinie = Schwerlinie)

$$I_y^{II} = \frac{b \cdot x^3}{12} + b \cdot x \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \alpha_s \cdot A_{s1} \cdot (d - x)^2 = \frac{b \cdot x^3}{3} + \alpha_s \cdot A_{s1} \cdot (d - x)^2$$

Oder über $\kappa = \frac{M}{E_c I_y}$ und $\kappa = \frac{\epsilon_s}{d - x}$ und $M = F_s \cdot z = A_{s1} \cdot E_s \cdot \epsilon_s \cdot z$

$$E_c I_y^{II} = \frac{M}{\kappa} = \frac{A_{s1} \cdot E_s \cdot \epsilon_s \cdot z \cdot (d - x)}{\epsilon_s} = A_{s1} \cdot E_s \cdot z \cdot (d - x) \quad I_y^{II} = A_{s1} \cdot \alpha_s \cdot z \cdot (d - x)$$

3 Berücksichtigung des Kriechens

Die auftretenden Kriechdehnungen werden im GZG (lineares Kriechen) mit Hilfe der **Kriechzahl** $\varphi(t, t_0)$ als Vielfaches der elastischen Kurzzeitdehnung $\varepsilon_{ci,28}$ ermittelt:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{ci,28} \cdot \varphi(t, t_0) \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{ci,28} = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c}$$

Die Kriechzahl $\varphi(t, t_0)$ bezieht sich auf den Tangentenmodul E_c , der mit $1,05E_{cm}$ angenommen werden darf.

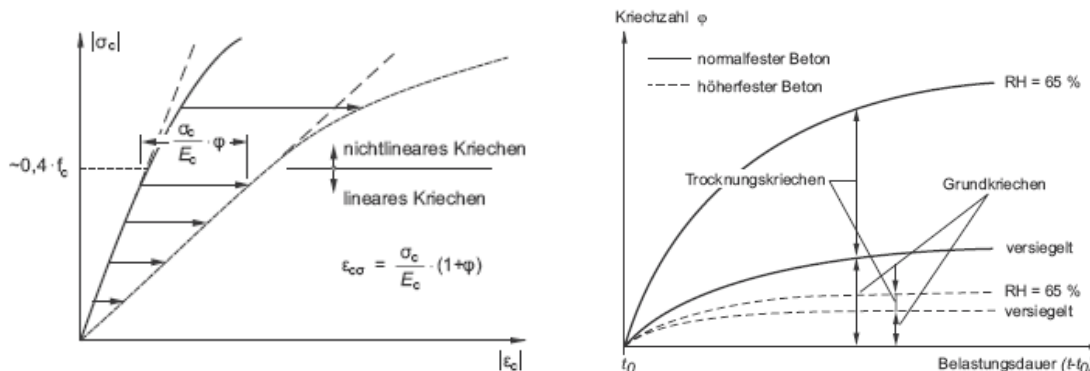


Bild: Abgrenzung zw. Linearem und nichtlinearem Kriechen, Kriechkomponenten

Anstatt mit der Dehnung kann im GZG näherungsweise mit einem effektiven E-Modul $E_{c,eff}$ gerechnet werden, wodurch die Berücksichtigung von Kriechen erheblich vereinfacht wird:

$$E_{c,eff} = \frac{E_{cm}}{1 + \alpha_i \cdot \rho(t, t_0) \cdot \varphi(t, t_0)} \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \frac{E_{cm}}{E_c} = \frac{E_{cm}}{1,05 \cdot E_{cm}} = \frac{1}{1,05}$$

Der Beiwert ρ ist der sog. **Relaxationsbeiwert** und erfasst einerseits den **zeitlichen Verlauf der Spannungen** und andererseits die **mit zunehmendem Betonalter verminderte Kriechfähigkeit**. ρ wird deshalb auch als **Alterungsbeiwert** bezeichnet. Im Allgemeinen liegt er zwischen 0,5 und 1,0. Für **stetig veränderliche Spannung** kann er mit hinreichender Genauigkeit als konstant mit $\rho = 0,8$ angesetzt werden. Bei geringem veränderlichem Lastanteil wird $\rho = 1,0$ angenommen.

Wenn die Betondruckspannung im Alter t_0 den Wert $0,45f_{ck}(t_0)$ übersteigt, ist in der Regel die Nichtlinearität des Kriechens zu berücksichtigen. Diese hohen Spannungen können durch Vorspannung mit sofortigem Verbund entstehen, z. B. bei Fertigteilen im Bereich der Spannglieder. In diesen Fällen darf die nichtlineare rechnerische Kriechzahl wie folgt ermittelt werden:

$$\varphi_{nl}(\infty, t_0) = \varphi(\infty, t_0) \cdot e^{1,5 \cdot (k_\sigma - 0,45)}$$

k_σ das Spannungs-Festigkeitsverhältnis $\sigma_c / f_{ck}(t_0)$, wobei σ_c die Druckspannung ist und $f_{ck}(t_0)$ der charakteristische Wert der Betondruckfestigkeit zum Zeitpunkt der Belastung.

Das folgende Bild zeigt die Veränderung der Dehnungen und Spannungen infolge Kriechen am Beispiel eines Einfeldträgers in Feldmitte. Man kann erkennen, dass sich im Gegensatz zum Zustand I im Zustand II die Druckzone prägnant vergrößert. Der Abfall der Biegesteifigkeit ist deshalb und wegen des nur zum Teil ansetzbaren Betonquerschnitts im Zustand II bei weitem nicht so groß wie im Zustand I.

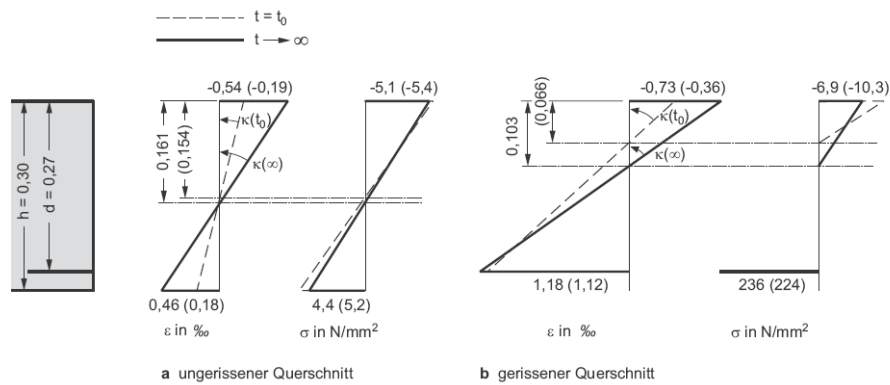


Bild: Auswirkung des Kriechens auf die Dehnungen und Spannungen im Querschnitt

Im EC 2 werden für lineares Kriechen nur Endkriechzahlen für eine Belastungsdauer von 70 Jahren und 2 relative Luftfeuchtigkeiten ($RH = 50\%$ und $RH = 80\%$) in Form von Nomogrammen angegeben. Zur genaueren Rechnung (und zur Kontrolle) werden im Script „Kriechen+Schwinden.pdf“ die Rechengrundlagen angegeben.