

Biegebemessung

1 Materialgesetze von Beton und Stahl für die Bemessung

Die maßgebenden Materialeigenschaften des Betons wie Zug- und Druckfestigkeit werden durch Versuche und statistische Auswertung bestimmt. Die Betondruckfestigkeit wird nach Betonfestigkeitsklassen gegliedert, die sich auf die charakteristische (5 % - Fraktile) Zylinderdruckfestigkeit f_{ck} oder die Würfeldruckfestigkeit $f_{ck,cube}$ nach DIN EN 206-1 beziehen. Die Festigkeitsklassen dieser Norm beziehen sich auf die charakteristische Druckfestigkeit f_{ck} für ein Alter von 28 Tagen mit einem Maximalwert von $C_{max} = C100/115$.

Die für die Rechnung wichtigsten Parameter sind im EC 2 festgelegt:

Betonfestigkeitsklasse																	
1	f_{ck}	N/mm ²	12 ¹⁾	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	100 ²⁾
2	$f_{ck,cube}$	N/mm ²	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	115
3	f_{cm}	N/mm ²	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	108
4	f_{ctm}	N/mm ²	1,6	1,9	2,2	2,6	2,9	3,2	3,5	3,8	4,1	4,2	4,4	4,6	4,8	5,0	5,2
5	$f_{ctk;0,05}$	N/mm ²	1,1	1,3	1,5	1,8	2,0	2,2	2,5	2,7	2,9	3,0	3,1	3,2	3,4	3,5	3,7
6	$f_{ctk;0,95}$	N/mm ²	2,0	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2	4,6	4,9	5,3	5,5	5,7	6,0	6,3	6,6	6,8
7	$E_{cm} \cdot 10^{-3}$	N/mm ²	27	29	30	31	33	34	35	36	37	38	39	41	42	44	45
8	ϵ_{c1}	‰	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,25	2,3	2,4	2,45	2,5	2,6	2,7	2,8	2,8	2,8
9	ϵ_{cu1}	‰	3,5									3,2	3,0	2,8	2,8	2,8	2,8
10	ϵ_{c2}	‰	2,0									2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,6
11	ϵ_{cu2}	‰	3,5									3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6
12	η		2,0									1,75	1,6	1,45	1,4	1,4	1,4
13	ϵ_{c3}	‰	1,75									1,8	1,9	2,0	2,2	2,3	2,4
14	ϵ_{cu3}	‰	3,5									3,1	2,9	2,7	2,6	2,6	2,6

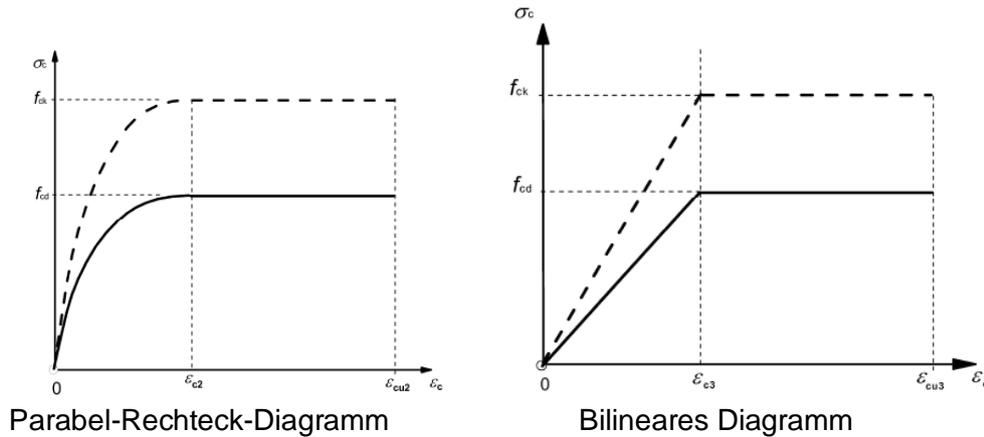
(NCI) ¹⁾ Die Festigkeitsklasse C12/15 darf nur bei vorwiegend ruhenden Einwirkungen verwendet werden.
²⁾ Die analytischen Beziehungen interpolieren nur bis C90/105. Die Werte für C100/115 wurden unabhängig davon festgelegt.

Analytische Beziehungen:

Zeile 3: $f_{cm} = f_{ck} + 8$ Zeile 4: $f_{ctm} = 0,30 f_{ck}^{(2/3)}$ für $\leq C50/60$; Zeilen 5 und 6: $f_{ctk;0,05} = 0,7 f_{ctm}$ (5 %-Quantil); Zeile 7: $E_{cm} = 22.000 (f_{cm} / 10)^{0,3}$ [N/mm ²] Zeile 8: siehe Bild 3.2: Zeile 9: siehe Bild 3.2, für $f_{ck} > 50$ N/mm ² ; Zeile 10: siehe Bild 3.3, für $f_{ck} > 50$ N/mm ² ; Zeile 11: siehe Bild 3.3, für $f_{ck} > 50$ N/mm ² ; Zeile 12: für $f_{ck} > 50$ N/mm ² ; Zeile 13: siehe Bild 3.4, für $f_{ck} > 50$ N/mm ² ; Zeile 14: siehe Bild 3.4, für $f_{ck} > 50$ N/mm ² .	$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln [1 + (f_{cm} / 10)]$ für $> C50/60$ $f_{ctk;0,95} = 1,3 f_{ctm}$ (95 %-Quantil) $E_{cm} = 22 \cdot (f_{cm} / 10)^{0,3}$ [GPa] $\epsilon_{c1} (\%) = 0,7 f_{cm}^{0,34} \leq 2,8$ $\epsilon_{cu1} (\%) = 2,8 + 27 [(98 - f_{cm}) / 100]^4$ $\epsilon_{c2} (\%) = 2,0 + 0,085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,83}$ $\epsilon_{cu2} (\%) = 2,8 + 35 [(90 - f_{ck}) / 100]^4$ $\eta = 1,4 + 23,4 [(90 - f_{ck}) / 100]^4$ $\epsilon_{c3} (\%) = 1,75 + 0,55 [(f_{ck} - 50) / 40]$ $\epsilon_{cu3} (\%) = 2,8 + 35 [(90 - f_{ck}) / 100]^4$
---	---

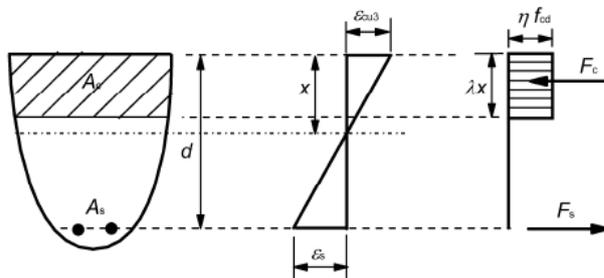
Tabelle 3.1: Festigkeits- und Formänderungskennwerte von Beton

Zur Ermittlung des Bemessungswertes des Querschnittswiderstandes dürfen 3 unterschiedliche Werkstoffgesetze für Beton verwendet werden, die im folgenden Bild für einen Beton $C < C55/67$ für Druckspannungen (Zug = 0) dargestellt sind:



Parabel-Rechteck-Diagramm

Bilineares Diagramm



Spannungsblock

Bild: Werkstoffgesetze des Betons für die Ermittlung der Querschnittstragfähigkeit

Für alle drei Werkstoffgesetze wird die Obergrenze der Betondruckspannung mit dem Designwert $f_{cd} = \alpha_{cc} \cdot f_{ck} / \gamma_c$ festgelegt. Hierbei berücksichtigt der Faktor $\alpha_{cc} = 0,85$ die Abnahme der Druckfestigkeit unter lang andauernder Belastung. Die Grenzwerte der Dehnungen ϵ_{ci} und ϵ_{cul} können der obigen Tabelle entnommen werden.

Funktion der Parabel:
$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (1.1)$$

Gerade in der bilinearen Funktion:
$$\sigma_c = f_{cd} \cdot \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c3}} \quad (1.2)$$

Spannungsblock: bis C50/60: $\eta = 1,0 \dots \lambda = 0,80$ (1.3)
 ab C 55/67: $\eta = 1,0 - (f_{ck} - 50)/200 \dots \lambda = 0,8 - (f_{ck} - 50)/400$

Achtung: Bei sich nach außen verjüngender Betondruckzone muss f_{cd} beim Spannungsblock mit dem Faktor 0,9 verkleinert werden.

Standardmäßig wird mit dem **Parabel-Rechteck-Diagramm** gerechnet, das bilineare Diagramm findet selten Anwendung. Speziell für **unregelmäßige Betondruckzonen**, für die eine Integration der Betonspannung zur Ermittlung der Resultierenden mit dem Parabel-Rechteck-Diagramm sehr aufwendig wird, ist der sog. **Spannungsblock** vorgesehen.

Für den Betonstahl sind die für die Berechnung wichtigsten Eigenschaften in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	B 500 A	B 500 A	B 500 B	B 500 B
	Betonstahl	Betonstahlmatten	Betonstahl	Betonstahlmatten
Duktilität		normal		hoch
Streckgrenze f_{yk} (MN/m ²)		500		500
Zugfestigkeit f_{tk} (MN/m ²)		550		550
Verhältnis f_{tk}/f_{yk}		1,05		1,08
Stahldehnung unter Höchstlast ϵ_{uk} (o/oo)		25		50
Ermüdungsfestigkeit (MN/m ²)	215	100	215	100
Wärmedehnzahl α (1/K)	0,00001			
Elastizitätsmodul E_s (MN/m ²)	200000			

Tabelle: Eigenschaften der Betonstähle

Das Werkstoffgesetz für Betonstahl ist im folgenden Bild dargestellt. Es besteht aus 2 Geraden, wobei der Anstieg der oberen näherungsweise vernachlässigt werden darf, d.h. die obere Gerade kann als Horizontale mit dem Bemessungswert $f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s$ angenommen werden. Die 1. Gerade repräsentiert das Hooke'sche Gesetz, d. h. die Steigung der Geraden entspricht dem E-Modul.

Achtung: Das dargestellte Werkstoffgesetz gilt **sowohl für Zug als auch für Druck**.

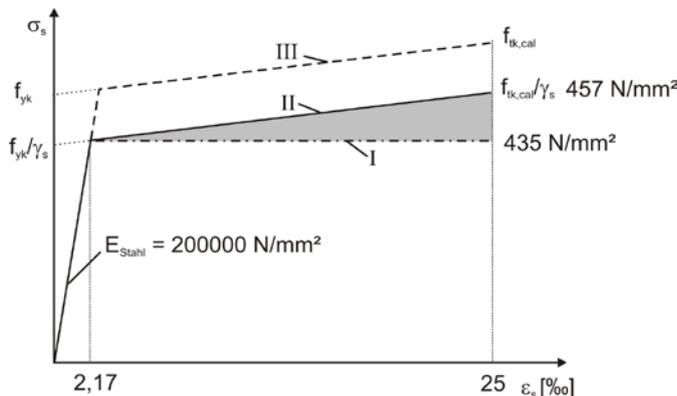


Bild: Materialgesetz für Betonstahl
III = idealisierter Verlauf II = Verlauf für die Bemessung
I = Vereinfachung für die Bemessung

Bemessungswert der Fließspannung:

$$f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s = 500/1,15 = 434,783 \cdot \text{MN}/\text{m}^2 \quad (1.4)$$

Bemessungswert der Zugfestigkeit:

$$f_{td,cal} = f_{tk,cal}/\gamma_s \quad (1.5)$$

Lage des Knickpunktes:

$$\epsilon_{yd} = f_{yd}/E_s = 0,002174 \quad (1.6)$$

Stahlspannung unterhalb der Fließgrenze:

$$\sigma_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad (1.7)$$

Stahlspannung vereinfacht nach Gerade I:

$$\sigma_s = f_{yd} \quad (1.8)$$

Stahlspannung nach Gerade II:

$$\sigma_s = f_{yd} + \frac{f_{td,cal} - f_{yd}}{\epsilon_{su} - \epsilon_{yd}} \cdot (\epsilon_s - \epsilon_{yd}) \quad (1.9)$$

Für die **Querschnittsbemessung** gilt:

$$f_{tk} = f_{tk,cal} = 525 \cdot \text{MN}/\text{m}^2 \quad (1.10)$$

$$\epsilon_{su} = 0,025 \quad (1.11)$$

Das nächste Bild zeigt einen Rechteckquerschnitt unter Biegung und Normalkraft mit der zugehörigen Dehnungs- und Kräfteverteilung bei Anwendung des Parabel-Rechteck-Diagramms für die Betonspannungen:

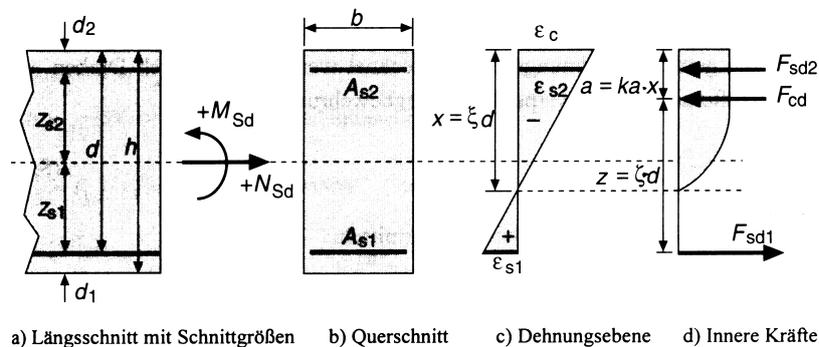


Bild: Rechteckquerschnitt mit Dehnungs- und Kräfteverteilung

Infolge der auf den Querschnitt einwirkenden Schnittgrößen M_{Ed} und N_{Ed} treten im Querschnitt innere Kräfte (F_{sd2} , F_{cd} , F_{sd1}) auf. Die Lage und Größe dieser inneren Kräfte lassen sich mit Hilfe der Werkstoffgesetze berechnen, was im folgenden Kapitel erläutert wird.

Wenn die geometrischen Größen $d_1, d_2, d, h, b, \varepsilon_c, \varepsilon_{s1}$ bekannt sind, dann lässt sich der Tragwiderstand mit Hilfe der restlichen Abmessungen (a, z) und des Gleichgewichts sehr einfach berechnen:

Höhe der Betondruckzone:

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c - \varepsilon_{s1}} \cdot d \quad (2.1)$$

Bezogene Druckzonenhöhe (griechisch xi):

$$\xi = x/d \quad (2.2)$$

Lage der Betondruckkraft vom oberen Rand aus:

$$a = k_a \cdot x \quad (2.3)$$

Hebelarm der inneren Kräfte z zwischen F_{cd} und F_{sd1} :

$$z = \zeta \cdot d \quad (2.4)$$

mit

$$z = d - a = d - k_a \cdot x$$

und

$$\zeta \cdot d = d - k_a \cdot \xi \cdot d$$

folgt der bezogene Hebelarm (griechisch zeta):

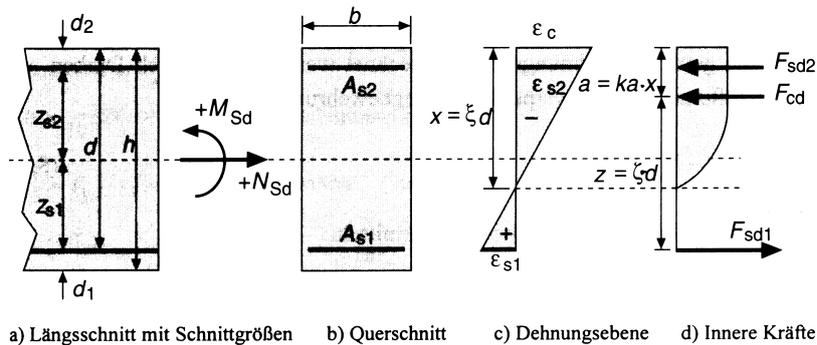
$$\zeta = 1 - k_a \cdot \xi \quad (2.5)$$

Der Querschnittswiderstand bezogen auf die Schwerachse des Querschnitts berechnet sich mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen: Da im obigen Bild die inneren Kräfte zu den Schnittgrößen äquivalent sind (kein Gleichgewicht!), folgt:

$$N_{Rd} = \sum H \quad N_{Rd} = F_{sd1} - F_{cd} - F_{sd2} \quad (2.6)$$

$$M_{Rd} = \sum M_{SP} \quad M_{Rd} = F_{sd1} \cdot (d - h/2) + F_{cd} \cdot (h/2 - a) + F_{sd2} \cdot (h/2 - d_2) \quad (2.7)$$

2.1 Berechnung von Lage und Größe der inneren Kräfte



Grundlage für die hier gezeigte Herleitung ist das Bild oben. Die Resultierende Betondruckkraft lässt sich durch Integration der Betondruckspannungen über die Druckzonenhöhe x ermitteln. Für eine konstante Druckzonenhöhe x kann b vor das Integral

herausgezogen werden:

$$F_{cd} = \int_0^x \sigma_c(y) \cdot dA = b \cdot \int_0^x \sigma_c(y) \cdot dy \quad (2.8)$$

Durch Division von F_{cd} durch die Resultierende bei konstanter Spannungsverteilung $b \cdot x \cdot f_{cd}$ ergibt sich ein dimensionsloser Beiwert, der die Völligkeit der parabelförmigen Spannungsverteilung charakterisiert,

der Völligkeitsbeiwert

$$\alpha_R = \frac{b \cdot \int_0^x \sigma_c(y) \cdot dy}{b \cdot x \cdot f_{cd}} \quad (2.9)$$

Daraus folgt die resultierende Betondruckkraft:

$$F_{cd} = \alpha_R \cdot x \cdot b \cdot f_{cd} \quad (2.10)$$

Die Lage der Betondruckkraft F_{cd} ergibt sich aus dem Momentgleichgewicht um die Dehnungsnulllinie:

$$F_{cd} \cdot (x - a) = b \cdot \int_0^x \sigma_c(y) \cdot y \cdot dy \quad (2.11)$$

Daraus folgt mit der Abkürzung $k_a = a / x$:

$$k_a = 1 - \frac{b \cdot \int_0^x \sigma_c(y) \cdot y \cdot dy}{F_{cd} \cdot x} \quad (2.12)$$

2.1.1 Rechteckige Betondruckzone mit Parabel-Rechteck-Diagramm

Eine Auswertung der Integrale für das Parabel-Rechteck-Diagramm und einen Querschnitt mit rechteckiger Betondruckzone ergibt folgende Ergebnisse:

Hilfsgröße:
$$f = \frac{\varepsilon_{c2} - \varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}}$$

Bereich 1 (reine Parabel): $|\varepsilon_c| \leq |\varepsilon_{c2}|$

$$\alpha_R = \frac{\varepsilon_c \cdot n + \varepsilon_c + \varepsilon_{c2} \cdot f^{(n+1)} - \varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c \cdot (n+1)} \quad (2.13)$$

$$k_{ai} = \frac{3 \cdot n \cdot \varepsilon_c^2 - 2 \cdot n \cdot \varepsilon_c^2 \cdot f^n + \varepsilon_c^2 \cdot n^2 - 2 \cdot \varepsilon_c^2 \cdot f^n + 2 \cdot n \cdot \varepsilon_c \cdot \varepsilon_{c2} \cdot f^n + 2 \cdot \varepsilon_c^2 + 2 \cdot \varepsilon_{c2}^2 \cdot f^n - 2 \cdot \varepsilon_{c2}^2}{2 \cdot \varepsilon_c^2 \cdot (n^2 + 3 \cdot n + 2)}$$

$$k_a = 1 - k_{ai} / \alpha_R \quad (2.14)$$

Bereich 2 (Parabel + Rechteck): $|\varepsilon_{c2}| < |\varepsilon_c| \leq |\varepsilon_{c2u}|$

Für $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2}$ folgt aus (2.13): $\alpha_{R1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ $k_{a1} = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2) \cdot (n+1)}\right) / \alpha_{R1}$

Im Bereich 2 gilt: $\alpha_{R2} = 1$ $k_{a2} = 0,5$

Hilfsgröße:
$$f = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_c}$$

Gesamtvolligkeitsbeiwert:
$$\alpha_R = \alpha_{R1} \cdot f + \alpha_{R2} \cdot (1 - f) \quad (2.15)$$

Gesamtbeiwert Hebelarm:
$$k_a = \frac{(1 - f)^2 \cdot \alpha_{R2} \cdot k_{a2} + f \cdot \alpha_{R1} \cdot (1 - f + k_{a1} \cdot f)}{\alpha_R} \quad (2.16)$$

Für einen **Beton C<C55** lassen sich die oben angegebenen **Formeln vereinfachen**, da die charakteristischen Betondehnungen immer gleich sind (-2.0 ‰ und -3,5 ‰) und der Parabelexponent immer konstant n=2 ist:

Bereich 1 (reine Parabel): $|\varepsilon_c| \leq |-2,0|$

$$\alpha_R = \frac{|\varepsilon_c|}{2} - \frac{\varepsilon_c^2}{12} \quad k_a = \frac{8 - |\varepsilon_c|}{24 - 4 \cdot |\varepsilon_c|} \quad (2.17)$$

Bereich 2 (Parabel + Rechteck): $|-2,0| < |\varepsilon_c| \leq |-3,5|$

$$\alpha_R = \frac{3 \cdot |\varepsilon_c| - 2}{3 \cdot |\varepsilon_c|} \quad k_a = \frac{|\varepsilon_c| \cdot (3 \cdot |\varepsilon_c| - 4) + 2}{2 \cdot |\varepsilon_c| \cdot (3 \cdot |\varepsilon_c| - 2)} \quad (2.18)$$

2.1.2 Rechteckige Betondruckzone mit bilinearem Diagramm

Die Auswertung der oben genannten Integrale ergibt die folgenden Beiwerte für eine Druckzone mit konstanter Breite:

$$\text{Bereich 1: } |\varepsilon_c| \leq |\varepsilon_{c3}| \quad \alpha_R = 0,5 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c3}} \quad k_a = \frac{1}{3} \quad (2.19)$$

$$\text{Bereich 2: } |\varepsilon_{c3}| < |\varepsilon_c| \leq |\varepsilon_{c3u}| \quad \alpha_R = \frac{|\varepsilon_c| - 0,5 \cdot |\varepsilon_{c3}|}{|\varepsilon_c|} \quad k_a = \frac{\varepsilon_c^2 - \varepsilon_c \cdot \varepsilon_{c3} + \varepsilon_{c3}^2 / 3}{2 \cdot |\varepsilon_c| \cdot (|\varepsilon_c| - 0,5 \cdot |\varepsilon_{c3}|)} \quad (2.20)$$

2.1.3 Beliebige Betondruckzone mit Spannungsblock

Da der Spannungsblock überall konstante Spannung aufweist, muss der Völligkeitsbeiwert = 1,0 sein, die Höhe des Spannungsblocks beträgt für einen Beton bis C50 0,8x, so dass **für konstante Breite der Druckzone $k_a = 0,4$** sein muss, weil die Resultierende in der Mitte des Spannungsblocks liegt:

$$\alpha_R = 1,0 \quad k_a = 0,4 \quad (2.21)$$

Bei **beliebiger Form der Betondruckzone** muss die **Resultierende durch den Schwerpunkt** der Betondruckzonenfläche des Querschnitts gehen.

2.1.4 Stahlkräfte

Die **Stahlkräfte** ergeben sich aus dem eingelegten Stahlquerschnitt mit Hilfe des Materialgesetzes.

$$F_{sd2} = \sigma_{sd2} \cdot A_{s2} \quad F_{sd1} = \sigma_{sd1} \cdot A_{s1} \quad (2.22)$$

Die für die Berechnung der Stahldruckkraft in der Druckzone erforderliche Dehnung ergibt

sich mit Hilfe des Strahlensatzes zu $\varepsilon_{s2} = \frac{\varepsilon_{c2} \cdot (x - d_2)}{x}$ (2.23)

Für evtl. vorhandene weitere Stahleinlagen im Querschnitt erfolgt die Berechnung der Stahlkräfte analog.

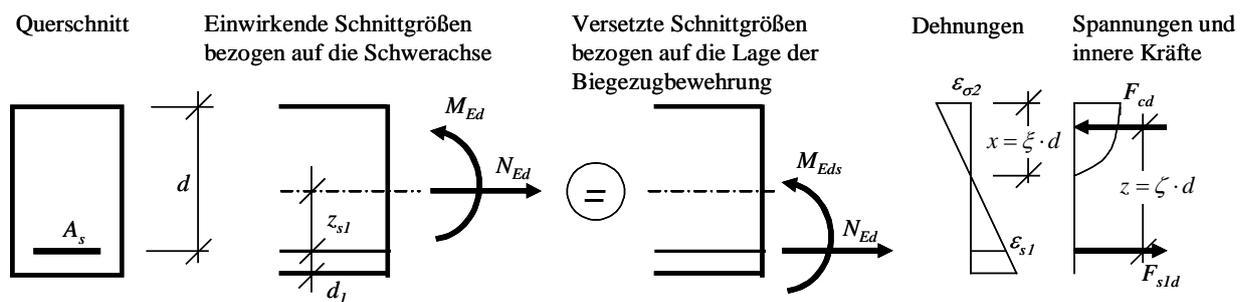
3 Bemessung eines Querschnitts

Im Normalfall sind die Schnittgrößen M_{Ed} und N_{Ed} an jeder Stelle eines Tragwerks infolge einer statischen Berechnung bekannt. Gesucht ist dann ein Stahlbetonquerschnitt, der diese Schnittgrößen aufnehmen kann. Hierzu kann prinzipiell folgende Zielvorgabe gemacht werden: Der Querschnitt ist so auszubilden, dass die Kosten minimal werden, das bedeutet meistens, dass möglichst wenig Stahl verbraucht werden soll.

Baupraktisch geht man normalerweise so vor, dass man für größere Bereiche eines Tragwerks einen konstanten Betonquerschnitt wählt und die hierfür erforderliche Stahleinlage berechnet. Dies muss unter Umständen an mehreren Stellen gemacht werden, wenn man nicht den für die maximale Schnittgrößenkombination ermittelten Stahl überall einlegen will (Wirtschaftlichkeit).

Der Vorgang der Bemessung lässt sich sehr einfach formulieren: Die Dehnungsebene des Querschnitts muss innerhalb der zulässigen Dehnungen so gewählt werden, dass **Gleichgewicht zwischen den inneren Kräften und den Schnittgrößen** herrscht:

$$\sum H = 0 \quad N_{Rd} \geq N_{Ed} \quad \sum M_{SP} = 0 \quad M_{Rd} \geq M_{Ed} \quad (3.1)$$



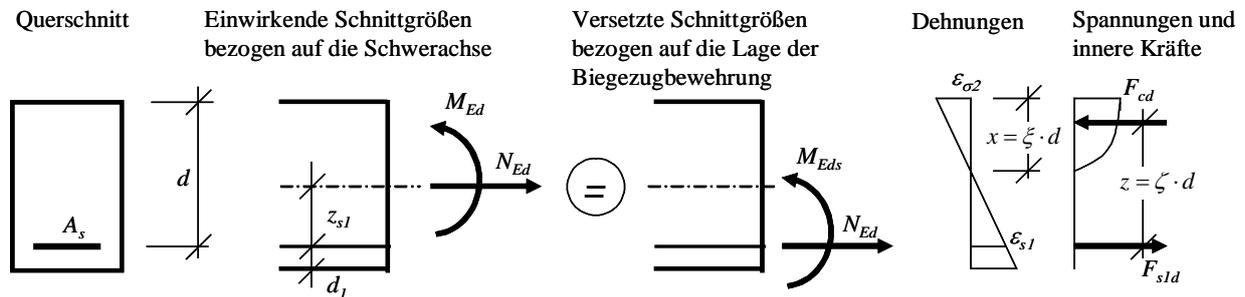
Im Normalfall sollten folgende Forderungen erfüllt werden:

- Volle Ausnutzung des Stahls aus Wirtschaftlichkeitsgründen: $\sigma_s \geq f_{yd}$
- Möglichst keine Anordnung von Druckbewehrung: $A_{s2} = 0 \text{ cm}^2$

Da die Stahleinlage A_{s1} unbekannt ist, kann die Gleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ zunächst nicht angewendet werden, die Gleichgewichtsbedingung $\sum M = 0$ kann nur **um die unbekannte Stahllage 1 (Index s)** angewendet werden. Man geht deshalb so vor:

- Wahl der Dehnungsebene mit $-3,5 \text{ ‰}$ auf der Druckseite und $+25 \text{ ‰}$ auf der Zugseite.
- Berechnung des Momentes der inneren Kräfte (Tragwiderstand) M_{Rds} um die Stahllage A_{s1} .
- Vergleich mit dem Moment der äußeren Kräfte (Schnittkräfte) M_{Eds} um die Stahllage A_{s1} .
- Je nach Ergebnis für die Momente M_{Eds} und M_{Rds} muss nun die Dehnung auf Beton- oder Stahlseite so lange reduziert werden, bis das innere mit dem äußeren Moment übereinstimmt ($M_{Rds} = M_{Eds}$).
- Durch Auswerten von $\sum H = 0$ kann die Stahlkraft F_{sd1} und somit A_{s1} ermittelt werden.

Für diese Vorgehensweise werden die inneren und äußeren Schnittgrößen **um die Stahlage 1** (Index s) benötigt, wobei F_{sd2} im Normalfall = 0 ist:



Innere Schnittgrößen:

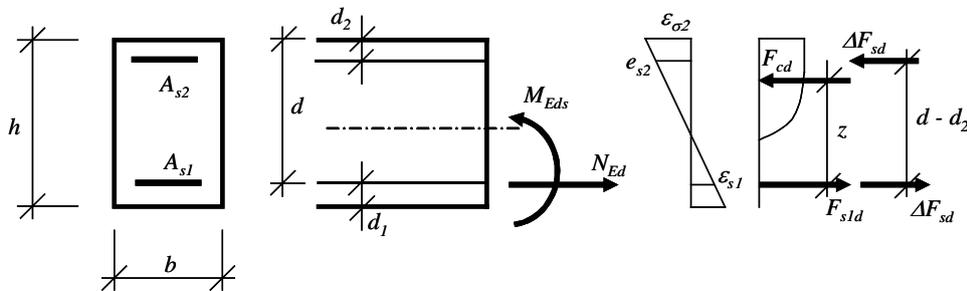
$$N_{Rd} = \sum H \quad N_{Rd} = F_{sd1} - F_{cd} - F_{sd2} \quad M_{Rds} = \sum M_S \quad M_{Rds} = F_{cd} \cdot z + F_{sd2} \cdot (d - d_2) \quad (3.2)$$

Äußere Schnittgrößen:

$$N_{Eds} = N_{Ed} \quad M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1} \quad (3.3)$$

z_{s1} ist der Abstand vom Querschnittsschwerpunkt zur Stahlage 1 (Rechteck: $z_{s1} = d - h/2$).

Wenn die Stahldehnung auf der Zugseite so weit zurückgenommen werden muss, dass f_{yd} unterschritten wird, dann muss **Druckbewehrung** eingelegt werden. Man stoppt dann das Zurücknehmen der Dehnung bei 2,174 ‰. Das dann noch abzudeckende Differenzmoment wird durch ein Kräftepaar aufgenommen, das durch die Druckbewehrung und eine entsprechende Erhöhung der Zugbewehrung gebildet wird:



$$\Delta M = M_{Eds} - M_{Rds,2,174} \quad (3.4)$$

$$\Delta F_s = \Delta M / (d - d_2) \quad (3.5)$$

$$\Delta A_s = \Delta F / \sigma_{sd1} \quad (3.6)$$

$$A_{s2} = \Delta F / \sigma_{sd2} \quad (3.7)$$

$$A_{s1} = A_{s1,2,174} + \Delta A_s \quad (3.8)$$

4 Bemessungsverfahren

4.1 k_d -Verfahren für Biegung ohne/mit Längskraft

Grundgedanke des k_d -Verfahrens:

Jeder beliebigen Schnittgröße M_{Rds} um die gesuchte Stahllage 1 soll eine bestimmte Dehnungsebene zugeordnet werden, und zwar so, dass der Stahl fließt (Wirtschaftlichkeit). Aus der Dehnungsebene können dann die inneren Schnittgrößen berechnet werden (siehe oben). Aus $\sum H = 0$ folgt dann der hierfür erforderliche Stahlquerschnitt.

Die Formeln zur Berechnung der inneren Kräfte aus den Randdehnungen sollen so aufbereitet werden, dass sie von den Querschnittsabmessungen unabhängig sind.

Die Herleitung erfolgt gemäß dem folgenden Bild ohne Druckbewehrung.

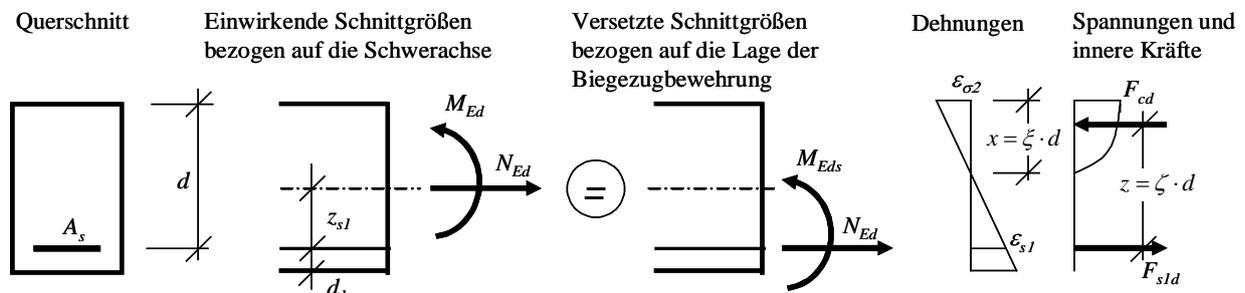


Bild: Querschnitt mit Kräfteverteilung ohne Druckbewehrung

Moment bezogen auf die Stahllage:
$$M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1} \quad (4.1)$$

Bemessungswert der Stahlfließspannung:
$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \quad (4.2)$$

Tragwiderstand: $\sum M_s = 0$
$$M_{Rds} = F_{cd} \cdot z = \alpha_R \cdot x \cdot b \cdot z \cdot f_{cd} \quad (4.3)$$

mit
$$x = \xi \cdot d \quad z = \zeta \cdot d \quad (4.4)$$

folgt:
$$M_{Rds} = \alpha_R \cdot \xi \cdot d \cdot b \cdot \zeta \cdot d \cdot f_{cd} \quad (4.5)$$

nach d aufgelöst und mit $M_{Rds} = M_{Eds}$:
$$d = \sqrt{\frac{M_{Eds}}{b}} \cdot \sqrt{\frac{1}{f_{cd} \cdot \alpha_R \cdot \zeta \cdot \xi}} \quad (4.6)$$

daraus ergibt sich der k_d -Wert zu:
$$k_d = \frac{d}{\sqrt{\frac{M_{Eds}}{b}}} \quad \text{oder} \quad k_d = \sqrt{\frac{1}{f_{cd} \cdot \alpha_R \cdot \zeta \cdot \xi}} \quad (4.7)$$

Wie man sieht, gehört für eine Betonsorte (f_{ck}) zu einem bestimmten k_d -Wert eine bestimmte Dehnungsebene (festgelegt durch ζ, ξ).

Stahlkraft im gesuchten Stahlquerschnitt:
$$F_{sd1} = M_{Eds} / z + N_{Ed} \quad (4.8)$$

Erforderliche Bewehrung:
$$A_{s1} = \frac{F_{sd1}}{f_{yd}} = \frac{M_{Eds}}{z \cdot f_{yd}} + \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} = \frac{M_{Eds}}{\zeta \cdot d \cdot f_{yd}} + \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} \quad (4.9)$$

Festlegung eines Beiwertes k_s :
$$k_s = \frac{100}{\zeta \cdot f_{yd}} \quad (4.9)$$

Damit ergibt sich die erf. Bewehrung:
$$A_{s1} = \frac{M_{Eds}}{d} \cdot k_s + \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} \quad (4.10)$$

Bewehrung mit Anstieg im Fließbereich:
$$A_{s1}' = \kappa_s \cdot A_{s1} \quad (4.11)$$

Mit den oben gezeigten Umformungen ist es möglich, Tabellen mit von der Betongüte abhängigen k_d -Werten als Eingangsgrößen zu erstellen. Diese können aus den Schnittgrößen und den Querschnittsabmessungen berechnet werden (s.o.). Ablesen kann man dann k_s -Werte und die Beiwerte zur Bestimmung von x und z und die zugehörigen Dehnungen.

Diese Tabellen sind **dimensionsgebunden**, d.h. jeder Wert muss in einer bestimmten Dimension vorliegen: M_{Eds} (kNm), N_{Ed} (kN), b (m), d (cm), A_{s1} (cm²), f_{yd} (43,5 kN/cm²).

k_d für Betonfestigkeitsklasse C ...									k_s	κ_s	ξ	ζ	ϵ_{c2}	ϵ_{s1}
12/15	16/20	20/25	25/30	30/37	35/45	40/50	45/55	50/60					in ‰	in ‰
14,34	12,41	11,10	9,93	9,07	8,39	7,85	7,40	7,02	2,32	0,95	0,025	0,991	-0,64	25,00
7,90	6,84	6,12	5,47	5,00	4,63	4,33	4,08	3,87	2,34	0,95	0,048	0,983	-1,26	25,00
5,87	5,08	4,54	4,06	3,71	3,44	3,21	3,03	2,87	2,36	0,95	0,069	0,975	-1,84	25,00
4,94	4,27	3,82	3,42	3,12	2,89	2,70	2,55	2,42	2,38	0,95	0,087	0,966	-2,38	25,00
4,39	3,80	3,40	3,04	2,77	2,57	2,40	2,27	2,15	2,40	0,95	0,104	0,958	-2,89	25,00
4,01	3,47	3,10	2,78	2,53	2,35	2,20	2,07	1,96	2,42	0,95	0,120	0,950	-3,40	25,00
3,74	3,24	2,90	2,59	2,36	2,19	2,05	1,93	1,83	2,44	0,96	0,138	0,943	-3,50	21,87
3,53	3,05	2,73	2,44	2,23	2,06	1,93	1,82	1,73	2,46	0,97	0,156	0,935	-3,50	18,88
3,35	2,90	2,60	2,32	2,12	1,96	1,84	1,73	1,64	2,48	0,97	0,174	0,927	-3,50	16,56
3,20	2,77	2,48	2,22	2,03	1,88	1,76	1,65	1,57	2,50	0,97	0,192	0,920	-3,50	14,70
2,97	2,57	2,30	2,06	1,88	1,74	1,63	1,53	1,46	2,54	0,98	0,227	0,906	-3,50	11,91
2,79	2,42	2,16	1,94	1,77	1,64	1,53	1,44	1,37	2,58	0,98	0,261	0,891	-3,50	9,92
2,65	2,30	2,06	1,84	1,68	1,55	1,45	1,37	1,30	2,62	0,99	0,294	0,878	-3,50	8,42
2,54	2,20	1,97	1,76	1,61	1,49	1,39	1,31	1,24	2,66	0,99	0,325	0,865	-3,50	7,26
2,45	2,12	1,90	1,70	1,55	1,43	1,34	1,26	1,20	2,70	0,99	0,356	0,852	-3,50	6,33
2,37	2,05	1,83	1,64	1,50	1,39	1,30	1,22	1,16	2,74	0,99	0,386	0,839	-3,50	5,57
2,30	1,99	1,78	1,59	1,45	1,35	1,26	1,19	1,13	2,78	0,99	0,415	0,827	-3,50	4,93
2,24	1,94	1,74	1,55	1,42	1,31	1,23	1,16	1,10	2,82	1,00	0,443	0,816	-3,50	4,40
2,19	1,90	1,70	1,52	1,39	1,28	1,20	1,13	1,07	2,86	1,00	0,471	0,804	-3,50	3,94
2,15	1,86	1,66	1,49	1,36	1,26	1,18	1,11	1,05	2,90	1,00	0,497	0,793	-3,50	3,54
2,11	1,82	1,63	1,46	1,33	1,23	1,15	1,09	1,03	2,94	1,00	0,523	0,782	-3,50	3,19
2,07	1,79	1,60	1,44	1,31	1,21	1,13	1,07	1,01	2,98	1,00	0,549	0,772	-3,50	2,88
2,04	1,77	1,58	1,41	1,29	1,19	1,12	1,05	1,00	3,02	1,00	0,573	0,762	-3,50	2,61
2,01	1,74	1,56	1,39	1,27	1,18	1,10	1,04	0,99	3,06	1,00	0,597	0,752	-3,50	2,36
1,99	1,72	1,54	1,38	1,26	1,17	1,09	1,03	0,98	3,09	1,00	0,617	0,743	-3,50	2,17

Bild: k_d -Tafel ohne Druckbewehrung

Man kann erkennen, dass in der untersten Zeile der Tafel die Betonstauchung voll ausgenutzt ist, der Stahl aber gerade noch fließt. k_d -Werte kleiner als der unterste Tafelwert bedeuten daher, dass man für diesen Fall besser Druckbewehrung einlegen sollte, um wirtschaftlich zu bleiben. Für diesen Fall wurden weitere k_d -Tafeln entwickelt:

$\xi = 0,25$ ($\epsilon_{s1} = 10,5 \text{ ‰}$, $\epsilon_{c2} = -3,5 \text{ ‰}$)										k_{s1}	k_{s2}
k_d für Betonfestigkeitsklasse C											
12/15	16/20	20/25	25/30	30/37	35/45	40/50	45/55	50/60			
2,85	2,47	2,21	1,97	1,80	1,67	1,56	1,47	1,40	2,57	0	
2,79	2,42	2,16	1,93	1,76	1,63	1,53	1,44	1,37	2,56	0,10	
2,73	2,36	2,11	1,89	1,73	1,60	1,49	1,41	1,34	2,56	0,20	
2,67	2,31	2,07	1,85	1,69	1,56	1,46	1,38	1,31	2,55	0,30	
2,60	2,26	2,02	1,80	1,65	1,53	1,43	1,35	1,28	2,55	0,40	
2,54	2,20	1,97	1,76	1,61	1,49	1,39	1,31	1,24	2,54	0,50	
2,47	2,14	1,92	1,71	1,56	1,45	1,36	1,28	1,21	2,54	0,60	
2,41	2,08	1,86	1,67	1,52	1,41	1,32	1,24	1,18	2,53	0,70	
2,34	2,02	1,81	1,62	1,48	1,37	1,28	1,21	1,14	2,53	0,80	
2,26	1,96	1,75	1,57	1,43	1,33	1,24	1,17	1,11	2,52	0,90	
2,19	1,90	1,70	1,52	1,38	1,28	1,20	1,13	1,07	2,52	1,00	
2,11	1,83	1,64	1,46	1,34	1,24	1,16	1,09	1,04	2,51	1,10	
2,03	1,76	1,57	1,41	1,29	1,19	1,11	1,05	1,00	2,51	1,20	
1,95	1,69	1,51	1,35	1,23	1,14	1,07	1,01	0,96	2,50	1,30	
1,86	1,61	1,44	1,29	1,18	1,09	1,02	0,96	0,91	2,50	1,40	

d_2/d	$\xi = 0,25$						
	ρ_1 für $k_{s1} =$				ρ_2	ϵ_{s2} [‰]	
	2,57	2,54	2,52	2,50			
0,06	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-2,66	
0,08	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	-2,38	
0,10	1,00	1,01	1,02	1,02	1,08	-2,10	
0,12	1,00	1,01	1,03	1,04	1,28	-1,82	
0,14	1,00	1,02	1,04	1,05	1,54	-1,54	
0,16	1,00	1,02	1,05	1,07	1,93	-1,26	
0,18	1,00	1,03	1,06	1,08	2,54	-0,98	
0,20	1,00	1,03	1,07	1,10	3,65	-0,70	

$\xi = 0,45$ ($\epsilon_{s1} = 4,3 \text{ ‰}$, $\epsilon_{c2} = -3,5 \text{ ‰}$)										k_{s1}	k_{s2}
k_d für Betonfestigkeitsklasse C											
12/15	16/20	20/25	25/30	30/37	35/45	40/50	45/55	50/60			
2,23	1,93	1,73	1,54	1,41	1,30	1,22	1,15	1,09	2,83	0	
2,18	1,89	1,69	1,51	1,38	1,28	1,20	1,13	1,07	2,81	0,10	
2,14	1,85	1,65	1,48	1,35	1,25	1,17	1,10	1,05	2,80	0,20	
2,09	1,81	1,62	1,45	1,32	1,22	1,14	1,08	1,02	2,78	0,30	
2,04	1,77	1,58	1,41	1,29	1,19	1,12	1,05	1,00	2,77	0,40	
1,99	1,72	1,54	1,38	1,26	1,16	1,09	1,03	0,97	2,75	0,50	
1,94	1,68	1,50	1,34	1,22	1,13	1,06	1,00	0,95	2,74	0,60	
1,88	1,63	1,46	1,30	1,19	1,10	1,03	0,97	0,92	2,72	0,70	
1,83	1,58	1,42	1,27	1,16	1,07	1,00	0,94	0,90	2,70	0,80	
1,77	1,53	1,37	1,23	1,12	1,04	0,97	0,92	0,87	2,69	0,90	
1,71	1,48	1,33	1,19	1,08	1,00	0,94	0,88	0,84	2,67	1,00	
1,65	1,43	1,28	1,15	1,05	0,97	0,91	0,85	0,81	2,66	1,10	
1,59	1,38	1,23	1,10	1,01	0,93	0,87	0,82	0,78	2,64	1,20	
1,53	1,32	1,18	1,06	0,96	0,89	0,84	0,79	0,75	2,63	1,30	
1,46	1,26	1,13	1,01	0,92	0,85	0,80	0,75	0,71	2,61	1,40	

d_2/d	$\xi = 0,45$						
	ρ_1 für $k_{s1} =$				ρ_2	ϵ_{s2} [‰]	
	2,83	2,78	2,74	2,69			2,64
0,06	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-3,03
0,08	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	-2,88
0,10	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	-2,72
0,12	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,04	-2,57
0,14	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	-2,41
0,16	1,00	1,01	1,03	1,04	1,05	1,06	-2,26
0,18	1,00	1,02	1,03	1,05	1,07	1,08	-2,10
0,20	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	-1,94
0,22	1,00	1,02	1,04	1,07	1,09	1,11	-1,79
0,24	1,00	1,03	1,05	1,08	1,11	1,13	-1,63

$\xi = 0,617$ ($\epsilon_{s1} = 2,17 \text{ ‰}$, $\epsilon_{c2} = -3,5 \text{ ‰}$)										k_{s1}	k_{s2}
k_d für Betonfestigkeitsklasse C											
12/15	16/20	20/25	25/30	30/37	35/45	40/50	45/55	50/60			
1,99	1,72	1,54	1,38	1,26	1,17	1,09	1,03	0,98	3,09	0	
1,95	1,69	1,51	1,35	1,23	1,14	1,07	1,01	0,95	3,07	0,10	
1,91	1,65	1,48	1,32	1,21	1,12	1,04	0,98	0,93	3,04	0,20	
1,86	1,61	1,44	1,29	1,18	1,09	1,02	0,96	0,91	3,01	0,30	
1,82	1,58	1,41	1,26	1,15	1,07	1,00	0,94	0,89	2,99	0,40	
1,78	1,54	1,38	1,23	1,12	1,04	0,97	0,92	0,87	2,96	0,50	
1,73	1,50	1,34	1,20	1,09	1,01	0,95	0,89	0,85	2,94	0,60	
1,68	1,46	1,30	1,17	1,06	0,98	0,92	0,87	0,82	2,91	0,70	
1,63	1,41	1,26	1,13	1,03	0,96	0,89	0,84	0,80	2,88	0,80	
1,58	1,37	1,23	1,10	1,00	0,93	0,87	0,82	0,78	2,86	0,90	
1,53	1,33	1,19	1,06	0,97	0,90	0,84	0,79	0,75	2,83	1,00	
1,48	1,28	1,14	1,02	0,93	0,86	0,81	0,76	0,72	2,80	1,10	
1,42	1,23	1,10	0,98	0,90	0,83	0,78	0,73	0,70	2,78	1,20	
1,36	1,18	1,06	0,94	0,86	0,80	0,75	0,70	0,67	2,75	1,30	
1,30	1,13	1,01	0,90	0,82	0,76	0,71	0,67	0,64	2,72	1,40	

d_2/d	$\xi = 0,617$						
	ρ_1 für $k_{s1} =$				ρ_2	ϵ_{s2} [‰]	
	3,09	3,02	2,94	2,86			2,78
0,06	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	-3,16
0,08	1,00	1,00	1,00	1,01	1,01	1,01	-3,05
0,10	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	-2,93
0,12	1,00	1,01	1,01	1,02	1,03	1,04	-2,82
0,14	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05	-2,71
0,16	1,00	1,01	1,02	1,04	1,05	1,06	-2,59
0,18	1,00	1,01	1,03	1,05	1,06	1,08	-2,48
0,20	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,09	-2,37
0,22	1,00	1,02	1,04	1,06	1,09	1,11	-2,25
0,24	1,00	1,02	1,05	1,07	1,10	1,12	-2,14

$$A_{s1} = \rho_1 \cdot k_{s1} \cdot \left[\frac{M_{Eds} [kNm]}{d [cm]} + \frac{N_{Ed} [kN]}{f_{yd} [kN/cm^2]} \right]$$

$$A_{s2} = \rho_2 \cdot k_{s2} \cdot \frac{M_{Eds} [kNm]}{d [cm]}$$

Bild: k_d -Tafeln für Rechteckquerschnitte mit Druckbewehrung

4.2 Dimensionsechtes Verfahren für Biegung ohne/mit Längskraft

Die Herleitung erfolgt am gleichen Bild wie das k_d -Verfahren ohne Druckbewehrung(s.o.).

Moment bezogen auf die Stahllage: $M_{Eds} = M_{Ed} - N_{Ed} \cdot z_{s1}$ (4.2.1)

Bemessungswert der Stahlfließspannung: $f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s$ (4.2.2)

Tragwiderstand: $\sum M_s = 0$ $M_{Rds} = F_{cd} \cdot z = \alpha_R \cdot x \cdot b \cdot z \cdot f_{cd}$ (4.2.3)

mit $x = \xi \cdot d$ $z = \zeta \cdot d$ (4.2.4)

folgt: $M_{Rds} = \alpha_R \cdot \xi \cdot d \cdot b \cdot \zeta \cdot d \cdot f_{cd}$ (4.2.5)

Tabelleneingangswert mit $M_{Rds} = M_{Eds}$ $\mu_{Eds} = \frac{M_{Eds}}{b \cdot d^2 \cdot f_{cd}} = \alpha_R \cdot \zeta \cdot \xi$ (4.2.6)

Stahlkraft im gesuchten Stahlquerschnitt: $F_{sd1} = N_{Ed} + F_{cd}$ (4.2.7)

Erforderliche Bewehrung: $A_{s1} = \frac{F_{sd1}}{\sigma_{sd}} = \frac{F_{cd}}{\sigma_{sd}} + \frac{N_{Ed}}{\sigma_{sd}} = \frac{\alpha_R \cdot \xi \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} + N_{Ed}}{\sigma_{sd}}$ (4.2.8)

Mit der Definition (**Ablesewert**) $\omega = \frac{A_{s1} \cdot \sigma_{sd} - N_{Ed}}{b \cdot d \cdot f_{cd}} = \alpha_R \cdot \xi$ (4.2.9)

ergibt sich die **erforderliche Bewehrung** $A_{s1} = \frac{1}{\sigma_{sd}} \cdot (\omega \cdot b \cdot d \cdot f_{cd} + N_{Ed})$ (4.2.10)

Eine **Bemessung für Druckbewehrung** sollte erfolgen, wenn das sog. Tragmoment $\lim M_{Sds}$ erreicht wird. $\lim M_{Eds}$ gehört z.B. für C<C55 zu dem Dehnungszustand $-3,5/2,174$ ‰. Es kann aus den Bemessungstabellen entnommen werden.

Das über $\lim M_{Eds}$ hinausgehende Moment wird als Kräftepaar auf die Zug- und Druckbewehrung verteilt (wie oben schon gezeigt):

Differenzmoment $\Delta M_{Eds} = M_{Eds} - \lim M_{Eds}$ (4.2.11)

Stahlkräfte $\Delta F_s = \frac{\Delta M_{Eds}}{d - d_2}$ $F_{s1} = \frac{\lim M_{Eds}}{z}$ (4.2.12)

Erforderliche Bewehrung $A_{s1} = \frac{F_{s1} + \Delta F_s + N_{Ed}}{f_{yd}}$ $A_{s2} = \frac{\Delta F_s}{\sigma_{sd2}}$ (4.2.13)

Alternativ zu dieser Vorgehensweise können wiederum spezielle Tabellen für Querschnitte mit Druckbewehrung entwickelt werden.

μ_{Eds}	ω	$\xi = \frac{x}{d}$	$\zeta = \frac{z}{d}$	ε_{c2} in ‰	ε_{s1} in ‰	$\sigma_{sd}^{1)}$ in MPa BSt 500	$\sigma_{sd}^{*2)}$ in MPa BSt 500
0,01	0,0101	0,030	0,990	-0,77	25,00	435	457
0,02	0,0203	0,044	0,985	-1,15	25,00	435	457
0,03	0,0306	0,055	0,980	-1,46	25,00	435	457
0,04	0,0410	0,066	0,976	-1,76	25,00	435	457
0,05	0,0515	0,076	0,971	-2,06	25,00	435	457
0,06	0,0621	0,086	0,967	-2,37	25,00	435	457
0,07	0,0728	0,097	0,962	-2,68	25,00	435	457
0,08	0,0836	0,107	0,956	-3,01	25,00	435	457
0,09	0,0946	0,118	0,951	-3,35	25,00	435	457
0,10	0,1057	0,131	0,946	-3,50	23,29	435	455
0,11	0,1170	0,145	0,940	-3,50	20,71	435	452
0,12	0,1285	0,159	0,934	-3,50	18,55	435	450
0,13	0,1401	0,173	0,928	-3,50	16,73	435	449
0,14	0,1518	0,188	0,922	-3,50	15,16	435	447
0,15	0,1638	0,202	0,916	-3,50	13,80	435	446
0,16	0,1759	0,217	0,910	-3,50	12,61	435	445
0,17	0,1882	0,232	0,903	-3,50	11,56	435	444
0,18	0,2007	0,248	0,897	-3,50	10,62	435	443
0,19	0,2134	0,264	0,890	-3,50	9,78	435	442
0,20	0,2263	0,280	0,884	-3,50	9,02	435	441
0,21	0,2395	0,296	0,877	-3,50	8,33	435	441
0,22	0,2528	0,312	0,870	-3,50	7,71	435	440
0,23	0,2665	0,329	0,863	-3,50	7,13	435	440
0,24	0,2804	0,346	0,856	-3,50	6,60	435	439
0,25	0,2946	0,364	0,849	-3,50	6,12	435	439
0,26	0,3091	0,382	0,841	-3,50	5,67	435	438
0,27	0,3239	0,400	0,834	-3,50	5,25	435	438
0,28	0,3391	0,419	0,826	-3,50	4,86	435	437
0,29	0,3546	0,438	0,818	-3,50	4,49	435	437
0,30	0,3706	0,458	0,810	-3,50	4,15	435	437
0,31	0,3869	0,478	0,801	-3,50	3,82	435	436
0,32	0,4038	0,499	0,793	-3,50	3,52	435	436
0,33	0,4211	0,520	0,784	-3,50	3,23	435	436
0,34	0,4391	0,542	0,774	-3,50	2,95	435	436
0,35	0,4576	0,565	0,765	-3,50	2,69	435	435
0,36	0,4768	0,589	0,755	-3,50	2,44	435	435
0,37	0,4968	0,614	0,745	-3,50	2,20	435	435
0,38	0,5177	0,640	0,734	-3,50	1,97	395	395
0,39	0,5396	0,667	0,723	-3,50	1,75	350	350
0,40	0,5627	0,695	0,711	-3,50	1,54	307	307

unwirtschaftlicher Bereich

Bild: Tabelle für dimensionsloses Verfahren ohne Druckbewehrung

In der äußersten rechten Spalte wird ein Anstieg der Stahlspannung über die Fließgrenze bis zur Streckgrenze $f_{tk,cal}$ berücksichtigt. Außerdem fällt auf, dass in den untersten 3 Zeilen der Tabelle unter die Fließgrenze des Stahls gegangen wird, was normalerweise unwirtschaftlich ist.

4.3 Bemessung für Längsdruck mit geringer Ausmitte

Dieses Verfahren ist hauptsächlich für Querschnitte gedacht, die nur mit kleinen Biegemomenten, aber großen Normalkräften belastet werden, was hauptsächlich bei Stützen und Wänden vorkommt. Da die Biegemomente meist wechselseitig wirken, werden diese **Querschnitte symmetrisch bewehrt**, d.h. $A_{s1} = A_{s2}$.

Ausmitte der Normalkraft

$$e = \frac{M_{Ed}}{N_{Ed}} \quad (4.3.1)$$

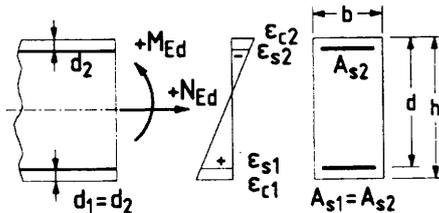


Bild: Symmetrisch bewehrter Querschnitt

Auf eine Herleitung wird hier verzichtet, sie erfolgt im Prinzip analog den oben gezeigten Vorgehensweisen. Die entwickelten Diagramme heißen **Interaktionsdiagramme** und erhalten die folgenden bezogenen Eingangsgrößen:

Bezogenes Moment

$$\mu_{Ed} = \frac{M_{Ed}}{b \cdot h^2 \cdot f_{cd}} \quad (4.3.2)$$

Bezogene Normalkraft

$$\nu_{Ed} = \frac{N_{Ed}}{b \cdot h \cdot f_{cd}} \quad (4.3.3)$$

Abzulesender mechanischer Bewehrungsgrad

$$\omega_{tot} = \frac{A_{s,tot}}{b \cdot h} \cdot \frac{f_{yd}}{f_{cd}} \quad (4.3.4)$$

Erforderliche Gesamtbewehrung

$$A_{s,tot} = A_{s1} + A_{s2} = \omega_{tot} \cdot b \cdot h \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \quad (4.3.5)$$

Im unten gezeigten **Interaktionsdiagramm** für $d_1/h = 0,05$ ist zu erkennen, dass das maximal aufnehmbare Moment des Querschnitts nicht bei einer Normalkraft $N_{Ed} = 0$ auftritt, sondern bei einer bestimmten Drucknormalkraft $N_{Ed} < 0$. Das bedeutet, dass für ein konstantes Moment bei steigender Drucknormalkraft nicht unbedingt auch die erforderliche Bewehrung zunehmen muss! Deshalb müssen bei Stützen oder Wänden unbedingt auch Lastfälle mit $\min N_{Ed}$ bis zur Bemessung untersucht werden.

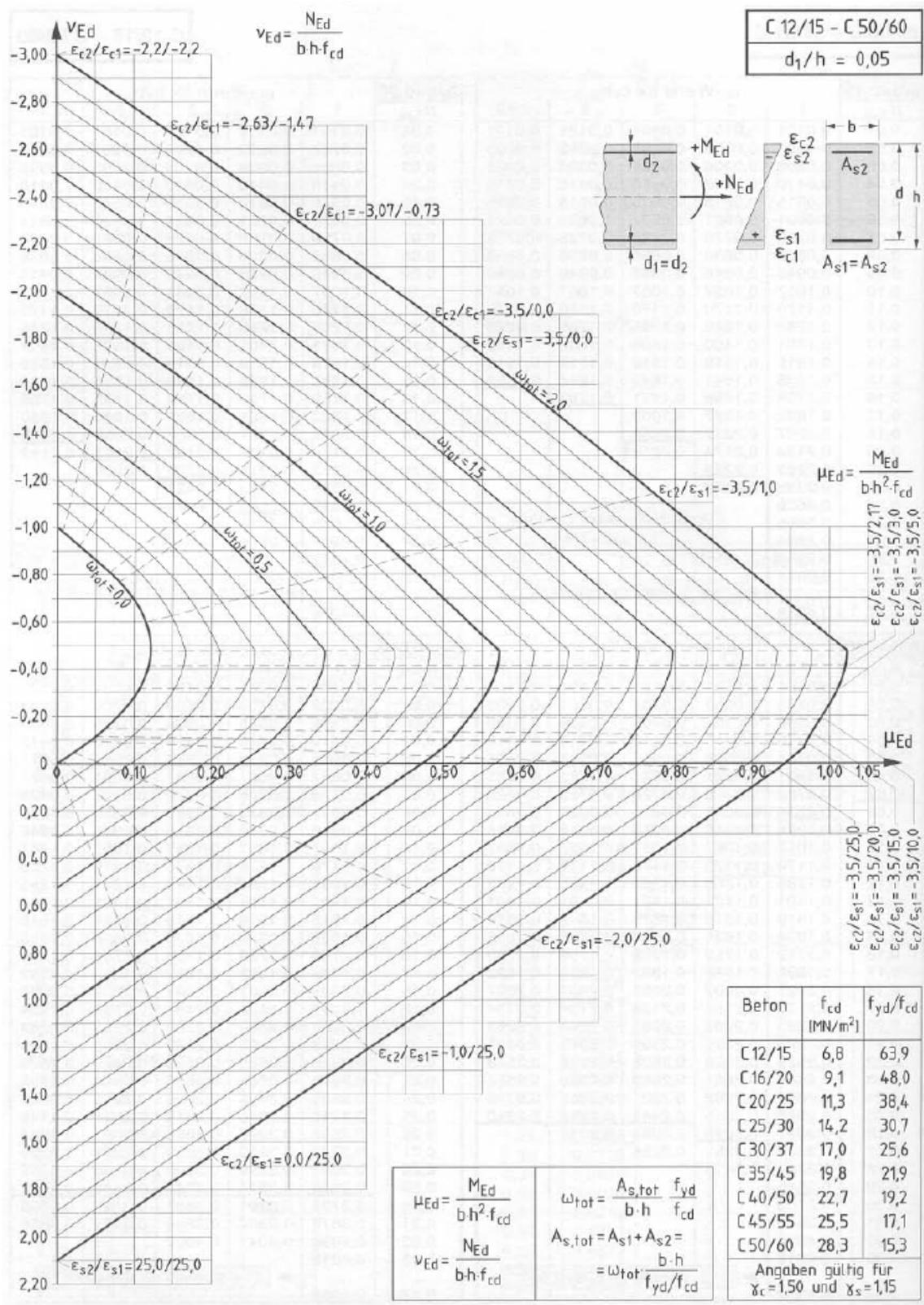


Bild: Interaktionsdiagramm für symmetrisch bewehrte Rechteckquerschnitte ($d_1/h = 0,05$)

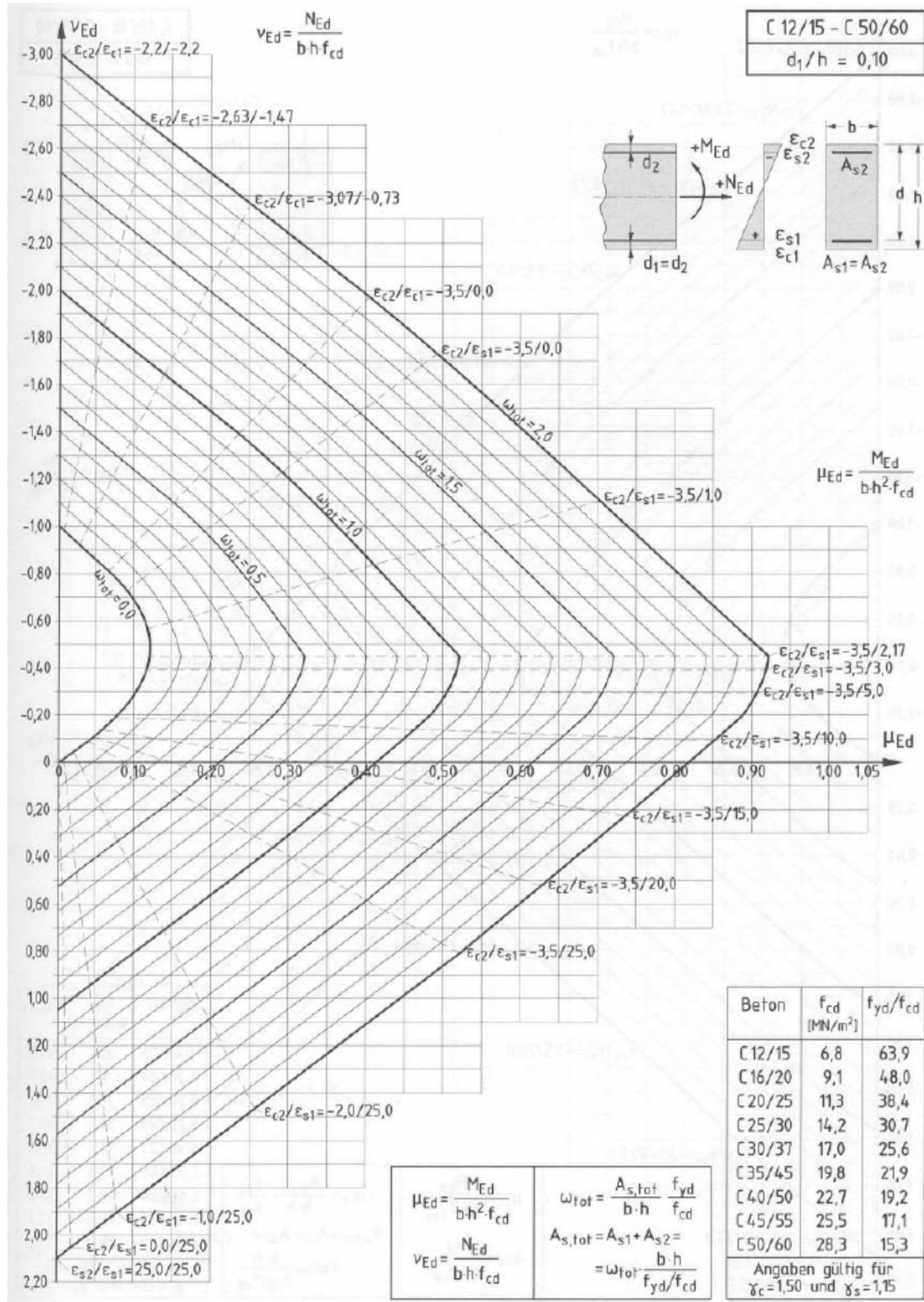


Bild: Interaktionsdiagramm für symmetrisch bewehrte Rechteckquerschnitte ($d_1/h = 0,10$)

4.4 Vollständig gerissene Querschnitte

Ein vollständig gerissener Querschnitt tritt auf, wenn die Exzentrizität der Normalkraft innerhalb der Stahllagen liegt. Für die Berechnung gemäß dem unten stehenden Bild gelten die folgenden Beziehungen:

Ausmitte: $e = \frac{M_{Ed}}{N_{Ed}}$ $e \leq z_{s1}$ Hebelarme: $z_{s1} = \frac{h}{2} - d_1$ $z_{s2} = \frac{h}{2} - d_2$ (4.4.1)

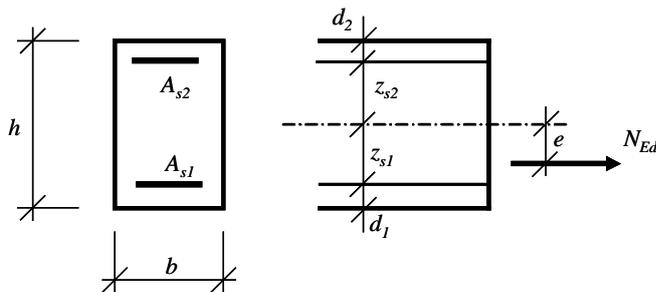


Bild: Vollständig gerissener Querschnitt

Mit der Annahme, dass der Stahl fließen soll, ergibt sich aus der Bedingung $\sum M = 0$ um die Stahllagen (Hebelgesetz):

$$A_{s1} = \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} \cdot \frac{z_{s2} + e}{z_{s1} + z_{s2}} \quad A_{s2} = \frac{N_{Ed}}{f_{yd}} \cdot \frac{z_{s1} - e}{z_{s1} + z_{s2}} \quad (4.4.2)$$

5 Bemessung bei gegliederter Druckzone

Die bisher angegebenen Bemessungshilfen können nur für eine Druckzone mit konstanter Breite angewendet werden. Wenn die Druckzone eine veränderliche Breite hat, spricht man von einer gegliederten Betondruckzone. In den allermeisten Fällen kann diese auf einen Plattenbalkenquerschnitt für die Bemessung zurückgeführt werden (wie z.B. ein Hohlkasten), weswegen hier nur der Plattenbalkenquerschnitt angesprochen wird.

Der große Vorteil eines Plattenbalkens liegt darin, dass aufgrund der großen Druckzone bei positiven Momenten fast nie eine Druckbewehrung erforderlich ist. Ein Nachteil tritt auf, wenn die Druckfläche in den Steg hineinreicht, so dass für die Ermittlung der Betondruckkraft eine Aufspaltung in 2 Anteile erforderlich ist (siehe Bild), was die Berechnung aufwändiger macht.

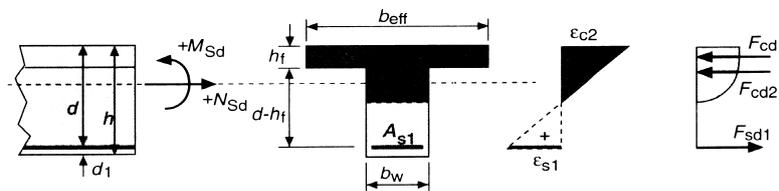


Bild: Aufspaltung der Betondruckzone in 2 Teilflächen

5.1 Schlanke Plattenbalken

Für schlanke Plattenbalken ($b_{eff} > 5 \cdot b_w$ siehe Bild unten) kann der Anteil der **Betondruckkraft im Steg vernachlässigt** werden. Die Lage der resultierenden Druckkraft liegt dann fast genau in der Mitte der Platte.

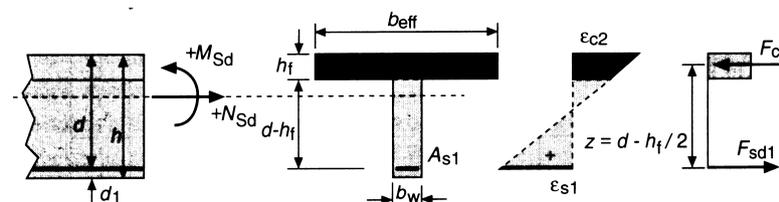


Bild: schlanker Plattenbalken

Dadurch lässt sich die erforderliche Bewehrung sehr einfach ermitteln, da der innere Hebelarm z fest steht:

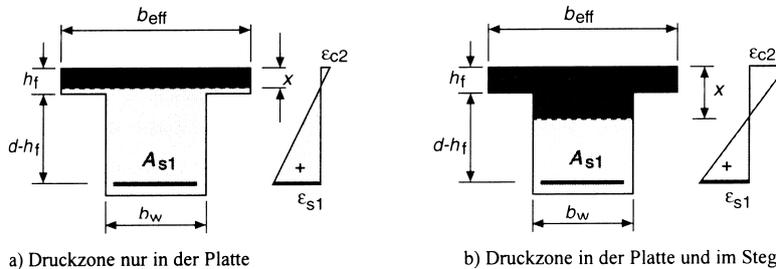
$$F_{sd1} = \frac{M_{Eds}}{d - h_f/2} + N_{Ed} \quad F_{cd} = \frac{M_{Eds}}{d - h_f/2} \quad A_{s1} = \frac{F_{sd1}}{f_{yd}} \quad (5.1)$$

Die Überprüfung der Betondruckspannung kann näherungsweise so erfolgen:

$$\sigma_{cd} = \frac{F_{cd}}{b_{eff} \cdot h_f} \leq f_{cd} \quad (5.2)$$

5.2 Gedrungene Plattenbalken

Für gedrungene Plattenbalken ($b_{eff} < 5 \cdot b_w$, siehe Bild unten) kann der Anteil der Druckkraft im Steg normalerweise nicht vernachlässigt werden. Falls die **Nulllinie in der Platte** liegt, kann die Bemessung für konstante Druckzonenbreite mit den **Standardverfahren** erfolgen.



a) Druckzone nur in der Platte
 Bild: gedrungener Plattenbalken

Wenn die **Nulllinie im Steg** liegt, dann kann näherungsweise mit einer **Ersatzbreite** $b_i = \lambda \cdot b_{eff}$ gerechnet werden. Diese wird so bestimmt, dass die Resultierende der Betondruckkraft und die Lage der Nulllinie gleich bleiben.

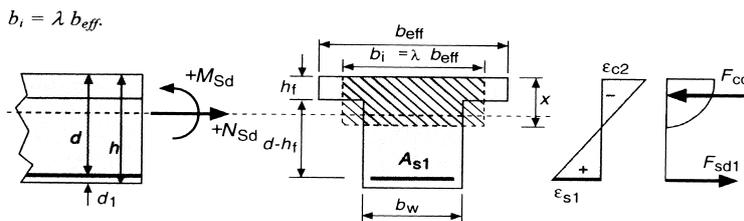


Bild: gedrungener Plattenbalken mit Ersatzbreite b_i zur Bemessung

Die Ersatzbreite kann mit Hilfe der folgenden Tabelle ermittelt werden:

h_f / d										b_{eff} / b_w						
0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0
$\xi = x / d$										λ_v						
0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
	0,50	0,44	0,39	0,33	0,28	0,22	0,17	0,11	0,06	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,99	0,98
		0,50	0,44	0,38	0,31	0,25	0,19	0,13	0,06	0,97	0,96	0,95	0,95	0,95	0,94	0,94
			0,50	0,43	0,36	0,29	0,21	0,14	0,07	0,95	0,92	0,90	0,89	0,89	0,88	0,87
				0,50	0,42	0,33	0,25	0,17	0,08	0,91	0,87	0,84	0,82	0,81	0,80	0,79
					0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,87	0,81	0,77	0,75	0,73	0,71	0,70
						0,50	0,38	0,25	0,13	0,83	0,75	0,70	0,66	0,64	0,62	0,60
							0,50	0,33	0,17	0,79	0,69	0,62	0,58	0,55	0,53	0,50
								0,50	0,25	0,75	0,62	0,55	0,50	0,46	0,44	0,40
									0,50	0,71	0,56	0,47	0,42	0,37	0,34	0,30

Wie man sieht, wird für die Ermittlung der Ersatzbreite b_i die Druckzonenhöhe gebraucht. Da diese aber vorab nicht bekannt ist, muss iterativ vorgegangen werden: Schätzen der Druckzonenhöhe x ergibt eine Ersatzbreite b_i , damit Bemessung des Querschnitts und Ermittlung der Druckzonenhöhe. Wiederholen des Rechengangs so lange bis die geschätzte Druckzonenhöhe mit der errechneten übereinstimmt.

6 Einschränkungen bei der Bemessung

Zur Sicherstellung der Rotationsfähigkeit muss die **Druckzonenhöhe unter Umständen begrenzt** werden:

Linear-elastische Rechnung

Die Druckzonenhöhe muss begrenzt werden für

- ◆ Durchlaufträger mit Stützweitenverhältnis benachbarter Felder von $0,5 < l_1/l_2 < 2,0$
- ◆ Riegel von Rahmen.
- ◆ Bauteile, die vorwiegend auf Biegung beansprucht sind, incl. durchlaufender und in Querrichtung kontinuierlich gestützter Platten.

$$C < C55 \dots x/d \leq 0,45 \quad C \geq C55 \dots x/d \leq 0,35$$

Bei geeigneten konstruktiven Maßnahmen braucht die Druckzonenhöhe nicht begrenzt zu werden. Hierzu zählen z.B. die Regelungen für die Querbewehrung.

Linear-elastische Rechnung mit Umlagerung für den Grenzzustand der Tragfähigkeit

Die Momentenumlagerung in Abhängigkeit der Druckzonenhöhe muss begrenzt werden für

- ◆ Durchlaufträger mit Stützweitenverhältnis benachbarter Felder von $0,5 < l_1/l_2 < 2,0$
- ◆ Riegel von unverschieblichen Rahmen.
- ◆ Bauteile, die vorwiegend auf Biegung beansprucht sind, incl. durchlaufender und in Querrichtung kontinuierlich gestützter Platten.

Allgemein: $C \leq C50 \quad \delta \geq k_1 + k_2 \cdot x_u/d \quad k_1 = 0,64 \quad k_2 = 0,8$

$$C > C50 \quad \delta \geq k_3 + k_4 \cdot x_u/d \quad k_3 = 0,72 \quad k_4 = 0,8$$

Hochduktiler Stahl: $\delta \geq k_5 \quad C \leq C50 \quad k_5 = 0,70 \quad C > C50 \quad k_5 = 0,80$

Normalduktiler Stahl: $\delta \geq k_6 \quad C \leq C50 \quad k_6 = 0,85 \quad C > C50 \quad k_6 = 1,00$

Verschiebliche Rahmen, vorgefertigte Segmente mit unbewehrten Kontaktfugen:

$$\delta = 1,0 \text{ (keine Umlagerung)}$$

δ Verhältnis des umgelagerten Moments zum Ausgangsmoment vor der Umlagerung
 x/d bezogene Druckzonenhöhe im Grenzzustand der Tragfähigkeit nach Umlagerung

Rechnung nach der Plastizitätstheorie

Wird hier nicht behandelt, siehe EC 2.

Mindestbewehrung

Zur Vermeidung von plötzlichem Versagen beim Aufreißen der Zugzone muss eine Mindestbewehrung eingelegt werden. Diese soll ebenfalls das Entstehen breiter Risse verhindern. Die Mindestbewehrung ist für die Kraft zu dimensionieren, die beim Aufreißen des Querschnitts auftritt. Hierbei darf der Stahl nicht fließen! Das hierfür maßgebende sog. Rissmoment ist mit der mittleren Zugfestigkeit f_{ctm} zu bestimmen, die Bemessung darf mit f_{yk} erfolgen:

$$M_{Ed,Riss} = (f_{ctm} - N_{Ed} / A_c) \cdot W_c \quad A_{s1} = \frac{M_{Ed,Riss}}{z \cdot f_{yk}} \quad z \cong 0,9 \cdot d \quad (6.1)$$

Höchstbewehrung

Damit der Beton noch sinnvoll eingebracht werden kann, muss die max. Bewehrungseinlage begrenzt werden. Auf Zug- und Druckseite darf der Stahlquerschnitt den folgenden Wert nicht überschreiten (im Bereich von Stößen kann es mehr werden):

$$A_s \leq 0,04 \cdot A_c \quad (6.2)$$

7 Literatur

- [1] EC 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton und Spannbetonbauwerken; Teil 1-1: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; 2011-01
- [2] EC 2: Bemessung und Konstruktion von Stahlbeton und Spannbetonbauwerken; Teil 1-1/NA: Allgemeine Bemessungsregeln und Regeln für den Hochbau; 2011-01 Nationaler Anhang
- [3] Beispiele zur Bemessung nach EC 2
Band 1: Hochbau, Deutscher Beton- und Bautechnik-Verein; Ernst & Sohn Verlag
- [4] *Goris*: Stahlbetonbau-Praxis nach EC 2,
Band 1: Grundlagen, Bemessung, Beispiele, Bauwerk Verlag
Band 2: Schnittgrößen, Gesamtstabilität, Bewehrung und Konstruktion, Brandbemessung